

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse

Fonction carré et fonction inverse — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Reconnaître les deux modèles.

- **Modèle du carré** : $f(x) = ax^2$, avec $a > 0$. La grandeur dépend du **carré** d'une autre.

$$\text{multiplier } x \text{ par } 2 \implies \text{multiplier } f(x) \text{ par } 4$$

Exemples : aire d'un carré (x^2) ou d'un disque (πr^2), distance de freinage, distance de chute, énergie cinétique.

- **Modèle de l'inverse** : $g(x) = \frac{k}{x}$. Le produit des deux grandeurs est **constant** : c'est une **proportionnalité inverse**.

$$x \times g(x) = k \quad \text{pour tout } x \neq 0$$

Exemples : durée à distance fixée, part par personne, longueur d'un rectangle à aire fixée, concentration après dilution.

- **Le test qui distingue les deux modèles** : on regarde ce qui se passe quand x **double**. Le résultat est multiplié par 4 pour le carré, divisé par 2 pour l'inverse (contre 2 et $\frac{1}{2}$ pour une situation affine).
- **Résoudre dans un contexte** : après $ax^2 = k$ ou $\frac{k}{x} = c$, on **écarte** les solutions impossibles. Une longueur, une durée, un effectif sont **strictement positifs**, et un effectif est de plus **entier**.
- **Un maximum sans dérivée**. Quand la forme $f(x) = M - (x - a)^2$ est fournie par l'énoncé, on conclut directement :

$$(x - a)^2 \geq 0 \implies f(x) \leq M, \quad \text{avec égalité pour } x = a$$

Correction de l'exercice 1 - L'aire d'un carré

- a) Pour un carré de côté x (avec $x > 0$) :

$$A(x) = x^2 \quad P(x) = 4x$$

- b) $A(6) = 36 \text{ cm}^2$ et $A(12) = 144 \text{ cm}^2$. Le rapport vaut

$$\frac{144}{36} = 4$$

Quand le côté **double**, l'aire est multipliée par **quatre**. C'est général :

$$A(2x) = (2x)^2 = 4x^2 = 4A(x)$$

- c) On résout $x^2 = 30$. Les solutions sont $\sqrt{30}$ et $-\sqrt{30}$, mais un côté est **strictement positif** : seule convient

$$x = \sqrt{30} \approx 5,5 \text{ cm}$$

Contrôle : $5,5^2 = 30,25$, proche de 30 ✓ (l'écart vient de l'arrondi).

- d) On cherche les $x > 0$ tels que $A(x) > P(x)$:

$$x^2 > 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow x(x - 4) > 0$$

Pour $x > 0$, le premier facteur est positif : le produit est positif si et seulement si $x - 4 > 0$, soit

$$x > 4 \text{ cm}$$

Contrôle : pour $x = 5$, aire 25 et périmètre 20, donc $25 > 20$ ✓ ; pour $x = 3$, aire 9 et périmètre 12, donc $9 < 12$ ✓

Ce que la question d) ne compare pas. Une aire (en cm^2) et un périmètre (en cm) ne sont pas des grandeurs de même nature : on compare ici leurs **mesures**, ce qui n'a de sens que parce que l'énoncé fixe implicitement l'unité. Le résultat $x > 4$ changerait si l'on mesurait en mètres.

La croissance quadratique. Multiplier le côté par 3 multiplie l'aire par 9, par 10 la multiplie par 100. Cette accélération est la signature du modèle du carré, et c'est elle qui rend les deux exercices suivants si contre-intuitifs.

Réponse. a) $A(x) = x^2$ et $P(x) = 4x$ — b) 36 puis 144 cm^2 : l'aire est multipliée par 4 — c) $\sqrt{30} \approx 5,5 \text{ cm}$ — d) pour $x > 4 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 2 - La distance de freinage

a) On remplace v par chaque valeur :

$$d(50) = \frac{50^2}{100} = \frac{2\,500}{100} = 25 \text{ mètres}$$

$$d(100) = \frac{100^2}{100} = \frac{10\,000}{100} = 100 \text{ mètres}$$

b) En passant de 50 à 100 km/h, la distance passe de 25 à 100 m : elle est multipliée par **quatre**, et non par deux.

C'est général : si la vitesse double, alors

$$d(2v) = \frac{(2v)^2}{100} = \frac{4v^2}{100} = 4 \times d(v)$$

c) On résout $d(v) = 64$:

$$\frac{v^2}{100} = 64 \Leftrightarrow v^2 = 6\,400 \Leftrightarrow v = 80 \text{ ou } v = -80$$

Une vitesse est positive : seule $v = 80 \text{ km/h}$ convient.

Contrôle : $\frac{80^2}{100} = \frac{6\,400}{100} = 64$ ✓

Pourquoi ce résultat compte. C'est l'argument central de la sécurité routière : passer de 90 à 130 km/h n'augmente pas la distance de freinage de 44 %, mais de plus du **double** (81 m contre 169 m). La courbe du graphique montre cette accélération : elle devient de plus en plus raide.

La limite du modèle. La formule ne tient compte ni du **temps de réaction** du conducteur (environ une seconde, soit 25 m à 90 km/h), ni de l'état de la chaussée. La distance d'**arrêt** réelle est donc sensiblement plus grande que la distance de freinage.

Le contrôle de vraisemblance. À 10 km/h, $d = 0,1 \text{ m}$; à 130 km/h, $d = 169 \text{ m}$. Ces ordres de grandeur sont cohérents avec ce que l'on observe.

Réponse. a) 25 m puis 100 m — b) elle est multipliée par 4 — c) à 80 km/h.

Correction de l'exercice 3 - Un trajet à vitesse variable

a) La durée est le quotient de la distance par la vitesse :

$$t(v) = \frac{120}{v} \quad \text{pour } v > 0$$

C'est une fonction du type $\frac{k}{v}$: durée et vitesse sont **inversement proportionnelles**, leur produit valant toujours 120.

b) On calcule :

$$t(60) = 2 \text{ h} \quad t(80) = 1,5 \text{ h} \quad t(100) = 1,2 \text{ h}$$

soit 2 h, 1 h 30 min et 1 h 12 min.

c) 1 h 20 min vaut $\frac{4}{3}$ d'heure, puisque 20 min = $\frac{1}{3}$ h. On résout :

$$\frac{120}{v} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 4v = 360 \Leftrightarrow v = 90 \text{ km/h}$$

Contrôle : $\frac{120}{90} = \frac{4}{3} \approx 1,33 \text{ h} = 1 \text{ h } 20 \text{ min} \checkmark$

d) **Non**. De 60 à 80 km/h, on gagne $2 - 1,5 = 0,5$ h, soit 30 minutes. De 80 à 100 km/h, on ne gagne que $1,5 - 1,2 = 0,3$ h, soit 18 minutes.

Pour une même augmentation de vitesse (+20 km/h), le gain de temps **diminue**. C'est le comportement caractéristique de la fonction inverse : sa décroissance s'amortit.

L'enseignement pratique. Rouler plus vite fait gagner de moins en moins. Passer de 110 à 130 km/h sur ce trajet ne ferait gagner que $\frac{120}{110} - \frac{120}{130} \approx 0,168$ h, soit environ **10 minutes** — pour une distance de freinage qui, elle, augmente de 121 à 169 mètres.

La conversion des durées. 1,2 h ne se lit pas « 1 h 20 » : la partie décimale se multiplie par 60, donc $0,2 \times 60 = 12$ minutes. C'est une source d'erreur constante dans ce type de problème.

Réponse. a) $t(v) = \frac{120}{v}$, proportionnalité inverse — b) 2 h, 1 h 30, 1 h 12 — c) 90 km/h — d) non : 30 min gagnées d'abord, puis seulement 18 min.

Correction de l'exercice 4 - Partager une somme

a) Le partage équitable divise le total par le nombre de participants :

$$p(n) = \frac{240}{n} \quad \text{pour } n \text{ entier, } n \geq 1$$

b) On calcule :

$$p(8) = 30 \text{ €} \quad p(10) = 24 \text{ €} \quad p(12) = 20 \text{ €}$$

c) On résout $p(n) = 16$:

$$\frac{240}{n} = 16 \Leftrightarrow 240 = 16n \Leftrightarrow n = \frac{240}{16} = 15$$

Il faut 15 **participants**. Contrôle : $\frac{240}{15} = 16 \text{ €} \checkmark$

d) On résout $p(n) < 10$:

$$\frac{240}{n} < 10 \Leftrightarrow 240 < 10n \Leftrightarrow n > 24$$

(la multiplication par n conserve le sens de l'inégalité puisque $n > 0$).

Comme n est **entier**, il faut au moins 25 **participants**.

Contrôle : $p(24) = 10 \text{ €}$ exactement, ce qui ne descend pas **en dessous** de 10 € ; $p(25) = 9,60 \text{ €} \checkmark$

Le rôle du contexte sur le domaine. Ici n est un **entier strictement positif** : on ne partage pas entre 7,5 personnes. C'est ce qui impose d'arrondir vers le **haut** à la question d).

L'amortissement de la décroissance. De 8 à 10 participants, la part baisse de 6 € ; de 10 à 12, de seulement 4 €. Chaque nouvel arrivant fait baisser la part **de moins en moins** : c'est le même phénomène que pour la durée du trajet.

Une limite jamais atteinte. Aussi nombreux soient les participants, la part reste **strictement positive** : elle se rapproche de 0 sans jamais l'atteindre. C'est exactement ce que dit l'hyperbole.

Réponse. a) $p(n) = \frac{240}{n}$ — b) 30 €, 24 € et 20 € — c) 15 participants — d) oui, à partir de 25 participants.

Correction de l'exercice 5 – L'aire d'un disque

a) On applique la formule :

$$A(3) = \pi \times 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2 \approx 28,3 \text{ cm}^2$$

La valeur **exacte** est 9π ; 28,3 n'en est qu'une approximation.

b) On résout $\pi r^2 = 50$:

$$r^2 = \frac{50}{\pi} \approx 15,915 \quad \text{d'où} \quad r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx 3,99 \text{ cm}$$

(La solution négative est écartée : un rayon est positif.)

Contrôle : $\pi \times 3,99^2 \approx 50,0 \checkmark$

c) On calcule l'aire de chaque pizza. Attention : l'énoncé donne le **diamètre**, le rayon en est la moitié.

$$A_1 = \pi \times 15^2 = 225\pi \approx 706,9 \text{ cm}^2 \quad A_2 = \pi \times 20^2 = 400\pi \approx 1\,256,6 \text{ cm}^2$$

Puis le prix au centimètre carré :

$$\frac{12}{706,9} \approx 0,0170 \text{ €/cm}^2 \quad \frac{18}{1\,256,6} \approx 0,0143 \text{ €/cm}^2$$

La **grande pizza** est nettement plus avantageuse, malgré son prix plus élevé.

Pourquoi c'est contre-intuitif. Le diamètre augmente de 33 % ($30 \rightarrow 40 \text{ cm}$), mais l'aire augmente de 78 % ($\frac{400}{225} \approx 1,78$), alors que le prix n'augmente que de 50 %. C'est le modèle du carré qui joue en faveur de la grande.

Le piège du diamètre. Utiliser 30 et 40 au lieu de 15 et 20 multiplierait les deux aires par 4. Le rapport final serait inchangé ici, mais les aires seraient fausses — et sur une question de comparaison à une valeur donnée, la réponse le serait aussi.

La règle générale. À prix proportionnel au diamètre, la plus grande pizza gagne toujours, puisque l'aire croît comme le **carré** du diamètre.

Réponse. a) $9\pi \approx 28,3 \text{ cm}^2$ — b) $r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx 3,99 \text{ cm}$ — c) la grande (0,0143 €/cm² contre 0,0170).

Correction de l'exercice 6 – Un rectangle d'aire constante

a) L'aire est le produit de la longueur par la largeur, donc $x \times L(x) = 36$, d'où

$$L(x) = \frac{36}{x} \quad \text{pour } x > 0$$

b) On calcule chaque longueur :

Largeur x	2	3	4	6	9
Longueur $L(x)$	18	12	9	6	4

On vérifie sur chaque colonne que le produit vaut 36 ✓

c) Le rectangle est un carré quand longueur et largeur sont égales :

$$\frac{36}{x} = x \Leftrightarrow 36 = x^2 \Leftrightarrow x = 6 \text{ ou } x = -6$$

Une largeur étant positive, seule $x = 6$ cm convient : le carré de côté 6 cm a bien une aire de 36 cm².

d) Le périmètre est le double de la somme des deux dimensions :

$$P(x) = 2\left(x + \frac{36}{x}\right)$$

$$P(2) = 2(2 + 18) = 40 \text{ cm} \quad P(6) = 2(6 + 6) = 24 \text{ cm}$$

La remarque. À aire égale, le périmètre **varie** beaucoup : un rectangle très allongé (2×18) a un périmètre bien plus grand qu'un carré (6×6).

En calculant d'autres valeurs — $P(3) = 30$, $P(4) = 26$, $P(9) = 34$ — on constate que le périmètre est **minimal pour le carré**. C'est un résultat classique : parmi tous les rectangles de même aire, le carré est celui de plus petit périmètre.

La symétrie du tableau. Les couples (2 ; 18) et (18 ; 2) décrivent le même rectangle, simplement posé dans l'autre sens. Le tableau se lit donc aussi bien dans un sens que dans l'autre à partir de la colonne $x = 6$.

L'application pratique. C'est pour cette raison qu'un éleveur cherchant à clôturer une aire donnée au moindre coût choisit un enclos aussi **carré** que possible.

Réponse. a) $L(x) = \frac{36}{x}$ — b) 18 ; 12 ; 9 ; 6 ; 4 — c) pour $x = 6$ cm — d) $P(2) = 40$ cm et $P(6) = 24$ cm : le périmètre est minimal pour le carré.

Correction de l'exercice 7 - L'intensité lumineuse

a) On remplace d par chaque valeur :

$$E(2) = \frac{100}{2^2} = \frac{100}{4} = 25 \text{ lux} \quad E(5) = \frac{100}{25} = 4 \text{ lux}$$

b) En doublant la distance, l'éclairement est **divisé par quatre** :

$$E(2d) = \frac{100}{(2d)^2} = \frac{100}{4d^2} = \frac{1}{4} \times E(d)$$

On le vérifie sur les valeurs : $E(2) = 25$ et $E(4) = \frac{100}{16} = 6,25$, soit bien le quart ✓

c) On résout $E(d) = 4$:

$$\frac{100}{d^2} = 4 \Leftrightarrow 100 = 4d^2 \Leftrightarrow d^2 = 25 \Leftrightarrow d = 5 \text{ ou } d = -5$$

Une distance est positive : $d = 5$ mètres — ce que la question a) confirmait déjà ✓

Un modèle qui combine les deux fonctions. L'expression $\frac{100}{d^2}$ fait intervenir **un carré au dénominateur** : la décroissance y est donc bien plus rapide que pour une simple proportionnalité inverse. À 10 m, il ne reste qu'1 lux, soit un centième de la valeur à 1 m.

Pourquoi la loi est en $\frac{1}{d^2}$. La lumière émise se répartit sur une sphère dont l'aire croît comme le carré du rayon. À quantité de lumière constante, l'éclairement reçu par unité

de surface décroît donc comme $\frac{1}{d^2}$ — le même raisonnement vaut pour le son et pour la gravitation.

La lecture du graphique. La courbe chute très vite près de la lampe, puis s'aplatit : passer de 1 à 2 m fait perdre 75 lux, passer de 8 à 9 m n'en fait perdre qu'environ 0,3. C'est pourquoi on approche une lampe de son livre plutôt que de l'éloigner d'un mètre.

Réponse. a) 25 lux puis 4 lux — b) il est divisé par 4 — c) à 5 mètres.

Correction de l'exercice 8 - Une chute libre

a) On calcule les images :

$$h(2) = 5 \times 2^2 = 5 \times 4 = 20 \text{ mètres}$$

$$h(3) = 5 \times 3^2 = 5 \times 9 = 45 \text{ mètres}$$

Entre la deuxième et la troisième seconde, l'objet parcourt donc $45 - 20 = 25$ mètres, contre 20 mètres pendant les deux premières : la chute **accélère**.

b) On résout $h(t) = 45$:

$$5t^2 = 45 \Leftrightarrow t^2 = 9 \Leftrightarrow t = 3 \text{ ou } t = -3$$

Une durée est positive : $t = 3$ secondes — ce que la question a) donnait déjà ✓

c) Il suffit de calculer l'image de 4 :

$$h(4) = 5 \times 16 = 80 \text{ mètres}$$

La falaise mesure environ 80 mètres.

La distance parcourue seconde après seconde. $h(1) = 5$, $h(2) = 20$, $h(3) = 45$, $h(4) = 80$: les distances **parcourues** pendant chaque seconde sont 5, 15, 25, 35 mètres. Elles augmentent de 10 m à chaque fois — c'est ce que signifie « accélération constante ».

Le modèle et ses limites. Le coefficient 5 vaut en réalité $\frac{g}{2} \approx 4,9$, et la formule néglige les **frottements de l'air**. Pour une chute de quelques dizaines de mètres, l'approximation reste bonne ; pour un parachutiste, elle ne vaut plus du tout au-delà de quelques secondes.

Le contrôle de vraisemblance. Une chute de 80 m en 4 s correspond à une vitesse moyenne de 20 m/s, soit 72 km/h. C'est cohérent avec l'ordre de grandeur attendu pour une chute de cette hauteur.

Réponse. a) 20 m puis 45 m — b) 3 secondes — c) environ 80 mètres.

Correction de l'exercice 9 - Un voyage en autocar

a) Le coût total est partagé équitablement :

$$c(n) = \frac{480}{n} \quad n \text{ entier, } 1 \leq n \leq 50$$

$$c(16) = 30 \text{ €} \quad c(24) = 20 \text{ €} \quad c(32) = 15 \text{ €}$$

b) On résout $c(n) < 18$:

$$\frac{480}{n} < 18 \Leftrightarrow 480 < 18n \Leftrightarrow n > \frac{480}{18} \approx 26,67$$

Comme n est entier, il faut au moins 27 **participants**.

Contrôle : $c(26) = \frac{480}{26} \approx 18,46 \text{ €}$ (encore au-dessus de 18 €) et $c(27) = \frac{480}{27} \approx 17,78 \text{ €}$ ✓

c) La fonction c est **décroissante** sur $]0; +\infty[$: le coût par personne est donc minimal

pour le **plus grand** nombre de participants possible, soit $n = 50$.

$$c(50) = \frac{480}{50} = 9,60 \text{ €}$$

Le raisonnement de la question c). On n'a pas besoin de tester toutes les valeurs : il suffit de savoir que la fonction est décroissante et de prendre la **borne supérieure** du domaine. C'est l'usage le plus direct du sens de variation.

Le sens de l'arrondi à la question b). L'énoncé demande de **descendre sous** 18 €. Le résultat 26,67 s'arrondit donc vers le **haut** : 26 participants ne suffisent pas. Arrondir mécaniquement à 27 sans tester 26 serait imprudent — le test le confirme.

Le domaine dicté par le contexte. Ici n est entier, positif, et **borné par** 50. Trois contraintes que l'expression $\frac{480}{n}$ ne porte pas d'elle-même : seul l'énoncé les donne.

Réponse. a) $c(n) = \frac{480}{n}$; 30 €, 20 € et 15 € — b) à partir de 27 participants — c) 9,60 € pour 50 participants.

Correction de l'exercice 10 - Un enclos rectangulaire

a) Le périmètre vaut 40 m, donc la somme de la largeur et de la longueur vaut 20 m :

$$2(x + L) = 40 \Leftrightarrow x + L = 20 \Leftrightarrow L = 20 - x$$

L'aire est le produit des deux dimensions :

$$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2 \quad \text{pour } 0 < x < 20$$

b) On développe la forme proposée :

$$100 - (x - 10)^2 = 100 - (x^2 - 20x + 100) = 100 - x^2 + 20x - 100 = 20x - x^2$$

C'est bien l'expression trouvée en a) ✓

c) Un carré est toujours **positif ou nul**, donc $(x - 10)^2 \geq 0$, et en retranchant :

$$A(x) = 100 - (x - 10)^2 \leq 100$$

L'aire ne dépasse donc jamais 100 m². L'égalité a lieu lorsque $(x - 10)^2 = 0$, c'est-à-dire pour

$$x = 10 \text{ mètres}$$

L'enclos optimal mesure alors 10 m sur $20 - 10 = 10$ m : c'est un **carré**, d'aire 100 m².

La méthode, sans dérivée. On lit le maximum directement sur la forme $M - (x - a)^2$: la quantité retranchée est positive ou nulle, donc le maximum M est atteint quand elle s'annule, en $x = a$. C'est l'outil de Seconde pour optimiser, et il suppose que l'énoncé fournisse cette forme.

Le contrôle sur quelques valeurs. $A(5) = 75$, $A(8) = 96$, $A(10) = 100$, $A(12) = 96$, $A(15) = 75$: l'aire croît puis décroît, avec un sommet en 10 ✓ La symétrie autour de $x = 10$ se lit aussi sur le graphique.

Le lien avec l'exercice du rectangle d'aire constante. On y avait vu qu'à **aire** fixée, le carré minimise le périmètre. On voit ici la propriété réciproque : à **périmètre** fixé, le carré maximise l'aire. Les deux énoncés se répondent.

Réponse. a) $L = 20 - x$ et $A(x) = x(20 - x)$ — b) le développement redonne $20x - x^2$ — c) $x = 10$ m, soit un carré d'aire maximale 100 m².

Correction de l'exercice 11 - Une dilution

a) On calcule :

$$c(2) = \frac{60}{2} = 30 \text{ g/L} \quad c(5) = \frac{60}{5} = 12 \text{ g/L}$$

b) On résout $c(V) = 4$:

$$\frac{60}{V} = 4 \Rightarrow 60 = 4V \Rightarrow V = 15 \text{ litres}$$

Contrôle : $\frac{60}{15} = 4 \text{ g/L} \checkmark$

c) **Une concentration nulle est impossible.** Il faudrait $\frac{60}{V} = 0$, or une fraction de numérateur non nul ne s'annule jamais. Autrement dit, le sel reste présent quelle que soit la dilution : la concentration se rapproche de 0 mais ne l'atteint pas.

Une concentration de 100 g/L est mathématiquement possible :

$$\frac{60}{V} = 100 \Rightarrow V = \frac{60}{100} = 0,6 \text{ litre}$$

Mais il faudrait vérifier que 60 g de sel se dissolvent effectivement dans 0,6 L d'eau : la solubilité du sel étant d'environ 360 g/L, c'est le cas — la solution reste sous la limite de saturation.

Ce que le modèle ignore. La fonction $\frac{60}{V}$ ne connaît pas de limite de solubilité. Au-delà d'environ 0,17 L, le sel cesserait de se dissoudre entièrement et la formule ne décrirait plus rien. Un modèle mathématique a toujours un **domaine de validité physique** plus étroit que son domaine de définition.

Le produit constant. Dans tous les cas, $c(V) \times V = 60$: c'est la masse de sel, qui ne change pas. Reconnaître cette invariance est le meilleur moyen d'identifier une proportionnalité inverse dans un énoncé.

La cohérence des réponses. Plus on ajoute d'eau, plus la concentration baisse : 30 puis 12 g/L $\checkmark$ Une concentration qui augmenterait avec le volume signifierait une expression inversée.

Réponse. a) 30 g/L puis 12 g/L — b) 15 litres — c) concentration nulle impossible ; 100 g/L atteinte avec 0,6 L.

Correction de l'exercice 12 - Reconnaître le bon modèle

a) **Modèle linéaire** (cas particulier d'afine, avec $p = 0$) : $f(x) = 3x$. Doubler la quantité double le prix.

b) **Modèle carré** : $f(x) = x^2$. Doubler le côté **quadruple** l'aire.

c) **Modèle inverse** : $f(x) = \frac{60}{x}$. Doubler le débit **divise le temps par deux** — le produit débit $\times$ temps reste égal à 60.

d) **Aucun des trois.** Le volume d'un cube est $f(x) = x^3$: doubler l'arête multiplie le volume par **huit**, et non par quatre. C'est un modèle *cube*, voisin du modèle carré mais distinct.

e) **Modèle inverse** : $f(x) = \frac{90}{x}$, comme pour tout partage d'une somme fixée.

Le test à appliquer systématiquement. On se demande ce que devient la grandeur quand x **double** :

Modèle	affine (linéaire)	carré	cube	inverse
x doublé	$\times 2$	$\times 4$	$\times 8$	$\div 2$

Ce test départage les quatre situations sans aucun calcul littéral.

Le repère de vocabulaire. « À tant l'unité » annonce un modèle linéaire. « Aire » ou « surface » annonce un carré, « volume » un cube. « Partagé entre », « à total fixé », « pour un débit de » annoncent un inverse.

Le cas c) en détail. Le temps de remplissage est $\frac{\text{volume}}{\text{débit}}$. À volume fixé, c'est bien une proportionnalité inverse entre temps et débit — la même structure que « distance ÷ vitesse » ou « somme ÷ nombre de participants ».

Réponse. a) linéaire — b) carré — c) inverse — d) ni l'un ni l'autre : modèle cube (x^3) — e) inverse.

Correction de l'exercice 13 - Un encadrement dans un contexte

a) L'intervalle $[9,8; 10,2]$ est contenu dans les positifs, où la fonction carré est **croissante** : l'ordre est conservé.

$$9,8 \leq x \leq 10,2 \implies 9,8^2 \leq x^2 \leq 10,2^2 \implies 96,04 \leq x^2 \leq 104,04$$

b) L'aire visée est 100 cm^2 . Les écarts aux deux bornes sont :

$$100 - 96,04 = 3,96 \text{ cm}^2 \quad 104,04 - 100 = 4,04 \text{ cm}^2$$

L'écart maximal est donc de $4,04 \text{ cm}^2$, atteint pour le côté le plus grand.

c) **Non.** Une erreur de 2 % sur le côté (10,2 au lieu de 10) produit sur l'aire une erreur de

$$\frac{104,04 - 100}{100} = 0,0404 \quad \text{soit } 4,04 \%$$

c'est-à-dire un peu **plus du double**. La raison : $(1,02)^2 = 1,0404$, et non 1,02.

La règle pratique. Sur une grandeur en x^2 , une petite erreur relative sur x est approximativement **doublée** sur le résultat. Sur un volume en x^3 , elle serait triplée.

L'asymétrie des deux écarts. Ils ne sont pas égaux (3,96 contre 4,04) : la fonction carré n'est pas affine, donc elle ne traite pas symétriquement un écart en plus et un écart en moins. C'est une observation fine, mais elle explique pourquoi l'intervalle obtenu n'est pas centré sur 100.

L'usage industriel. Quand une pièce doit respecter une tolérance **sur son aire**, on doit resserrer la tolérance sur sa **longueur** environ deux fois plus. C'est un calcul courant en usinage.

Réponse. a) $96,04 \leq x^2 \leq 104,04$ — b) $4,04 \text{ cm}^2$ — c) non : l'erreur relative est environ doublée (4,04 %).

Correction de l'exercice 14 - Comparer deux tarifs d'impression

a) L'aire de la photo vaut $x^2 \text{ cm}^2$. D'où

$$A(x) = 0,05x^2 \quad B(x) = 0,03x^2 + 2 \quad \text{pour } x > 0$$

b) Pour $x = 10$, l'aire vaut 100 cm^2 :

$$A(10) = 0,05 \times 100 = 5 \text{ €} \quad B(10) = 0,03 \times 100 + 2 = 3 + 2 = 5 \text{ €}$$

Les deux tarifs coûtent exactement le même prix ✓

c) L'égalité est bien vérifiée pour $x = 10$. Cherchons quand $A(x) < B(x)$:

$$0,05x^2 < 0,03x^2 + 2 \Leftrightarrow 0,02x^2 < 2 \Leftrightarrow x^2 < 100$$

Comme x est **positif** (c'est un côté), cela équivaut à

$$0 < x < 10$$

Le tarif A est donc le moins cher pour les photos de **moins de 10 cm de côté**, et le tarif

B au-delà.

Contrôle : pour $x = 6$, $A = 1,80$ € et $B = 3,08$ € ✓ pour $x = 15$, $A = 11,25$ € et $B = 8,75$ € ✓

La logique des deux offres. B fait payer un forfait mais un prix au cm^2 plus bas : c'est l'inverse de A. On retrouve la structure de toute comparaison d'offres, sauf que la variable de comparaison est ici l'**aire** et non le côté.

Le point de vigilance sur $x^2 < 100$. En toute rigueur, cette inéquation donne $-10 < x < 10$. C'est le **contexte** — un côté est positif — qui réduit l'ensemble à $]0 ; 10[$. Oublier ce tri est l'erreur typique des problèmes concrets avec un carré.

La croissance quadratique du coût. Doubler le côté quadruple l'aire, donc quadruple le coût variable. Une photo de 20 cm de côté coûte 20 € au tarif A, soit quatre fois le prix d'une photo de 10 cm.

Réponse. a) $A(x) = 0,05x^2$ et $B(x) = 0,03x^2 + 2$ — b) 5 € chacun — c) le tarif A est le moins cher pour $0 < x < 10$ cm.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un bassin à remplir

a) Le volume d'un pavé droit est le produit de l'aire de base par la hauteur :

$$V(x) = x^2 \times 1,5 = 1,5x^2 \quad \text{pour } x > 0$$

b) Pour $x = 4$:

$$V(4) = 1,5 \times 16 = 24 \text{ m}^3$$

Avec un débit de $3 \text{ m}^3/\text{h}$, la durée est

$$\frac{24}{3} = 8 \text{ heures}$$

c) On résout $V(x) = 96$:

$$1,5x^2 = 96 \Leftrightarrow x^2 = \frac{96}{1,5} = 64 \Leftrightarrow x = 8 \text{ ou } x = -8$$

Un côté est positif : $x = 8$ mètres.

Contrôle : $1,5 \times 64 = 96 \text{ m}^3$ ✓

d) La durée est le quotient du volume par le débit :

$$t(q) = \frac{54}{q} \quad \text{pour } q > 0$$

4 h 30 min valent 4,5 heures. On résout :

$$\frac{54}{q} = 4,5 \Leftrightarrow 54 = 4,5q \Leftrightarrow q = \frac{54}{4,5} = 12 \text{ m}^3/\text{h}$$

Contrôle : $\frac{54}{12} = 4,5 \text{ h}$ ✓

Les deux modèles réunis. Le volume suit un modèle **carré** en fonction du côté (doubler le côté quadruple le volume), et la durée suit un modèle **inverse** en fonction du débit (doubler le débit divise la durée par deux). Le même problème mobilise les deux fonctions du chapitre.

Le tri systématique des solutions. Aux questions c) et d), le calcul produisait une solution négative ou aurait pu en produire une : à chaque fois, le contexte — une longueur, un débit — l'élimine. C'est une étape de rédaction attendue, pas un détail.

Le bilan de la plaquette. Reconnaître le modèle par le test du doublement ($\times 4$ pour le carré, $\div 2$ pour l'inverse), écrire l'expression, calculer une image ou résoudre une équation — puis revenir au contexte, avec l'unité, le bon arrondi et l'élimination des

solutions impossibles.

Réponse. a) $V(x) = 1,5x^2$ — b) 24 m^3 , soit 8 heures de remplissage — c) un côté de 8 m —
d) $t(q) = \frac{54}{q}$ et il faut un débit de $12 \text{ m}^3/\text{h}$.