

Plaquette 2 – Variations et comparaisons

Fonction carré et fonction inverse – Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Sens de variation des deux fonctions de référence.

— **Fonction carré.** Elle change de sens en 0 :

Intervalle	$] -\infty ; 0]$	$[0 ; +\infty [$
Variation de x^2	décroissante	croissante

Le **minimum** est 0, atteint en $x = 0$.

— **Fonction inverse.** Elle est décroissante **sur chacun** des deux intervalles :

Intervalle	$] -\infty ; 0 [$	$] 0 ; +\infty [$
Variation de $\frac{1}{x}$	décroissante	décroissante

△ Elle n'est **pas** décroissante sur $\mathbb{R}^*$: le contre-exemple $-1 < 1$ avec $\frac{1}{-1} = -1 < 1 = \frac{1}{1}$ le montre.

— **Les règles de comparaison.**

si $0 < a < b$ alors $a^2 < b^2$ si $a < b < 0$ alors $a^2 > b^2$

si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ si $a < b < 0$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

— **Encadrer $f(x)$ à partir d'un encadrement de x .** On applique la fonction aux deux bornes, puis :

— si la fonction est **croissante** sur l'intervalle, l'ordre est conservé ;

— si elle est **décroissante**, l'ordre est **inversé** ;

— si l'intervalle **contient** 0, la fonction carré y atteint son minimum : la borne inférieure devient 0, et la borne supérieure est le **plus grand** des deux carrés.

Correction de l'exercice 1 – Les deux tableaux de variations

a) La fonction carré décroît jusqu'en 0, puis croît :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de x^2	décroissante	0	croissante

Elle admet un **minimum** égal à 0, atteint en $x = 0$. Elle n'a pas de maximum : x^2 peut être aussi grand que l'on veut.

b) La fonction inverse décroît sur chacun des deux intervalles :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de $\frac{1}{x}$	décroissante	interdit	décroissante

La mention *interdit* en 0 (une **double barre** dans un tableau manuscrit) rappelle que la valeur est **exclue** : la fonction n'y est pas définie. Elle n'a ni maximum ni minimum.

c) Parce que la définition de « décroissante sur un ensemble » exige que l'ordre soit renversé pour **tous** les couples de cet ensemble. Or avec $a = -1$ et $b = 1$:

$$-1 < 1 \quad \text{et pourtant} \quad \frac{1}{-1} = -1 < 1 = \frac{1}{1}$$

L'ordre est **conservé** pour ce couple : c'est un contre-exemple. La décroissance n'est vraie que **sur chaque intervalle pris séparément**.

La formulation correcte. On écrit « $\frac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty; 0[$ **et** sur $]0; +\infty[$ », avec le mot « et » et non « sur leur réunion ». Cette nuance est régulièrement exigée en évaluation.

La raison profonde. Le 0 n'est pas un simple point manquant : au voisinage de 0, la fonction passe de très grandes valeurs négatives à très grandes valeurs positives. Il y a un « saut » que la décroissance ne peut pas franchir.

Réponse. a) décroissante sur $]-\infty; 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$, minimum 0 en 0 — b) décroissante sur chacun des deux intervalles — c) contre-exemple $-1 < 1$ avec $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$.

Correction de l'exercice 2 - Comparer deux carrés de nombres positifs

Sur $[0; +\infty[$, la fonction carré est **croissante** : elle conserve l'ordre.

a) On a $0 < 3,2 < 3,5$, donc

$$3,2^2 < 3,5^2$$

(Contrôle : $10,24 < 12,25$ ✓)

b) Deux fractions de même numérateur : la plus grande est celle de **plus petit** dénominateur, donc $\frac{7}{9} < \frac{7}{8}$. Ces deux nombres étant positifs, la croissance donne

$$\left(\frac{7}{9}\right)^2 < \left(\frac{7}{8}\right)^2$$

(Contrôle : $\frac{49}{81} \approx 0,605$ et $\frac{49}{64} \approx 0,766$ ✓)

c) On a $0 < \sqrt{3} < \sqrt{5}$ (la fonction racine carrée conserve elle aussi l'ordre sur les positifs), donc

$$\sqrt{3}^2 < \sqrt{5}^2$$

Ici on peut même conclure directement : $\sqrt{3}^2 = 3$ et $\sqrt{5}^2 = 5$, et $3 < 5$ ✓

La rédaction attendue. Il ne suffit pas d'écrire le résultat : on **énonce la propriété** utilisée (« la fonction carré est croissante sur les positifs »), on **vérifie que les nombres sont positifs**, puis on conclut. C'est cette vérification de signe qui fait la différence avec l'exercice suivant.

Pourquoi le signe compte tant. Si les nombres avaient été négatifs, la conclusion aurait été **inversée**. Comparer deux carrés sans regarder le signe des nombres de départ est l'erreur la plus courante du chapitre.

Réponse. a) $3,2^2 < 3,5^2$ — b) $\left(\frac{7}{9}\right)^2 < \left(\frac{7}{8}\right)^2$ — c) $3 < 5$, la croissance sur les positifs conserve l'ordre.

Correction de l'exercice 3 - Comparer deux carrés de nombres négatifs

a) Les deux nombres -7 et -4 sont **négatifs**, et sur $]-\infty; 0]$ la fonction carré est **décroissante** : elle inverse l'ordre.

$$-7 < -4 \quad \text{donc} \quad (-7)^2 > (-4)^2$$

(Contrôle : $49 > 16$ ✓)

b) De même, $-0,8 < -0,3$, donc l'ordre s'inverse :

$$(-0,8)^2 > (-0,3)^2$$

soit $(-0,3)^2 < (-0,8)^2$. (Contrôle : $0,09 < 0,64$ ✓)

c) Ici les deux nombres sont **de signes contraires** : aucune règle de variation ne s'applique directement, puisqu'ils ne sont pas dans le même intervalle de monotonie.

On compare alors leurs **distances à zéro** : -5 est à 5 de zéro, 3 est à 3 de zéro. Comme $5 > 3$:

$$(-5)^2 > 3^2$$

(Contrôle : $25 > 9$ ✓)

La règle générale à retenir. Le carré compare les nombres selon leur **éloignement de zéro** : plus un nombre est loin de 0, plus son carré est grand, quel que soit son signe.

$$|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

L'erreur à éviter. Écrire « $-7 < -4$ donc $(-7)^2 < (-4)^2$ », en appliquant machinalement la conservation de l'ordre. Le réflexe est de **regarder d'abord le signe** des nombres, puis de choisir la bonne règle.

Réponse. a) $(-7)^2 > (-4)^2$ — b) $(-0,3)^2 < (-0,8)^2$ — c) $(-5)^2 > 3^2$ car -5 est plus loin de zéro que 3.

Correction de l'exercice 4 - Comparer deux inverses

a) Les deux nombres 5 et 8 sont **strictement positifs** et la fonction inverse est **décroissante** sur $]0 ; +\infty[$: elle inverse l'ordre.

$$5 < 8 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{5} > \frac{1}{8}$$

(Contrôle : $0,2 > 0,125$ ✓)

b) Les deux nombres -3 et -7 sont **strictement négatifs** et la fonction inverse est aussi décroissante sur $] -\infty ; 0[$:

$$-7 < -3 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{-7} > \frac{1}{-3}$$

(Contrôle : $-0,143 > -0,333$ ✓ — les deux sont négatifs, et c'est bien $-0,143$ le plus grand.)

c) On a $0 < 0,05 < 0,2$, donc par décroissance :

$$\frac{1}{0,05} > \frac{1}{0,2}$$

(Contrôle : $20 > 5$ ✓)

La règle à retenir. Pour deux nombres **de même signe**, l'inverse renverse toujours l'ordre. Le point délicat est le cas négatif : -7 est « plus petit » que -3 , donc son inverse est « plus grand » — c'est-à-dire **plus proche de zéro**.

Le contrôle par la proximité de zéro. Plus un nombre est **grand en valeur absolue**, plus son inverse est **proche de 0**. Ainsi $\frac{1}{-7} = -0,14$ est plus proche de 0 que $\frac{1}{-3} = -0,33$

✓

△ **Nombres de signes contraires.** La règle ne s'applique pas : $\frac{1}{-3} < 0 < \frac{1}{5}$, et on conclut simplement par le signe.

Réponse. a) $\frac{1}{5} > \frac{1}{8}$ — b) $\frac{1}{-7} > \frac{1}{-3}$ — c) $\frac{1}{0,05} > \frac{1}{0,2}$; l'inverse renverse l'ordre entre nombres de même signe.

Correction de l'exercice 5 - Ranger dans l'ordre croissant

a) Tous ces nombres sont des **carrés**, donc positifs. On les compare par leur **distance à zéro** : $0,4 < 1,5 < 2 < 3 < 3,1$, d'où

$$(-0,4)^2 < 1,5^2 < (-2)^2 < 3^2 < (-3,1)^2$$

Contrôle par les valeurs : $0,16 < 2,25 < 4 < 9 < 9,61$ ✓

b) Il faut d'abord séparer selon le **signe**. Les inverses de nombres négatifs sont négatifs, donc $\frac{1}{-2}$ et $\frac{1}{-10}$ sont les plus petits.

Entre eux : $-10 < -2$, et l'inverse renverse l'ordre sur les négatifs, donc $\frac{1}{-10} > \frac{1}{-2}$.

Autrement dit $\frac{1}{-2} < \frac{1}{-10}$.

Entre les deux positifs : $0,5 < 4$, donc $\frac{1}{0,5} > \frac{1}{4}$, soit $\frac{1}{4} < \frac{1}{0,5}$.

Au total :

$$\frac{1}{-2} < \frac{1}{-10} < \frac{1}{4} < \frac{1}{0,5}$$

Contrôle par les valeurs : $-0,5 < -0,1 < 0,25 < 2$ ✓

La méthode en deux temps. Pour ranger des inverses, on **trie par signe** d'abord, on compare à l'intérieur de chaque groupe ensuite. Mélanger les deux étapes conduit presque toujours à une erreur sur les négatifs.

Pourquoi les carrés sont plus simples. Ils sont tous positifs : un seul critère suffit, la distance à zéro. Aucune séparation préalable n'est nécessaire.

Réponse. a) $(-0,4)^2 < 1,5^2 < (-2)^2 < 3^2 < (-3,1)^2$ — b) $\frac{1}{-2} < \frac{1}{-10} < \frac{1}{4} < \frac{1}{0,5}$.

Correction de l'exercice 6 - Encadrer un carré (cas positif)

a) L'intervalle $[2 ; 5]$ est entièrement contenu dans $[0 ; +\infty[$, où la fonction carré est **croissante** : l'ordre est **conservé**. On applique donc la fonction aux deux bornes.

$$2 \leq x \leq 5 \implies 2^2 \leq x^2 \leq 5^2 \implies 4 \leq x^2 \leq 25$$

b) L'intervalle $[0,3 ; 0,7]$ est lui aussi inclus dans les positifs, donc même raisonnement :

$$0,3 \leq x \leq 0,7 \implies 0,3^2 \leq x^2 \leq 0,7^2 \implies 0,09 \leq x^2 \leq 0,49$$

La vérification par un point intérieur. Prenons $x = 3$ dans la question a) : $x^2 = 9$, et $4 \leq 9 \leq 25$ ✓ Ce test, qui ne coûte rien, détecte immédiatement un encadrement inversé.

Une observation sur la question b). Les carrés obtenus sont **plus petits** que les nombres de départ, puisque ceux-ci sont compris entre 0 et 1. L'encadrement $[0,09 ; 0,49]$ est d'ailleurs bien plus **étroit** que $[0,3 ; 0,7]$.

La méthode générale. On identifie l'intervalle, on repère le sens de variation dessus, on applique la fonction aux bornes, puis on écrit les inégalités **dans le bon sens**. C'est cette dernière étape qui demande de l'attention.

Réponse. a) $4 \leq x^2 \leq 25$ — b) $0,09 \leq x^2 \leq 0,49$.

Correction de l'exercice 7 - Encadrer un carré (cas négatif)

a) L'intervalle $[-5; -2]$ est entièrement contenu dans $] -\infty; 0]$, où la fonction carré est **décroissante**.

b) La décroissance **inverse** l'ordre : la plus petite valeur de x donne le plus **grand** carré.

$$-5 \leq x \leq -2 \implies (-5)^2 \geq x^2 \geq (-2)^2 \implies 25 \geq x^2 \geq 4$$

que l'on réécrit dans l'ordre habituel :

$$4 \leq x^2 \leq 25$$

c) Pour $x = -3$: $x^2 = 9$, et l'on a bien $4 \leq 9 \leq 25$ ✓

La coïncidence avec l'exercice précédent. L'encadrement obtenu est le même qu'avec $2 \leq x \leq 5$, ce qui n'a rien d'étonnant : les intervalles $[-5; -2]$ et $[2; 5]$ sont **symétriques** par rapport à 0, et deux nombres opposés ont le même carré.

L'erreur classique. Écrire directement $25 \leq x^2 \leq 4$, qui n'a aucun sens puisque $25 > 4$. Un encadrement dont la borne de gauche dépasse celle de droite est **toujours** faux : c'est un signal d'alarme à reconnaître.

Le réflexe de sécurité. Après tout encadrement, tester une valeur intérieure à l'intervalle. Ici $x = -3$ confirme le résultat ; il aurait invalidé l'encadrement inversé.

Réponse. a) $[-5; -2]$, où la fonction carré est décroissante — b) $4 \leq x^2 \leq 25$ — c) $(-3)^2 = 9$, compris entre 4 et 25 ✓

Correction de l'exercice 8 - Un encadrement qui contient zéro

a) Pour $x = 0$, qui appartient bien à $[-2; 3]$:

$$x^2 = 0$$

Or l'encadrement d'Alice affirmerait $4 \leq 0$, ce qui est **faux**. Sa proposition est donc incorrecte.

b) L'erreur vient de ce que l'intervalle $[-2; 3]$ **contient** 0 : la fonction carré n'y est pas monotone, elle décroît puis croît. On ne peut donc pas se contenter d'appliquer la fonction aux deux bornes.

Le minimum est atteint en $x = 0$ et vaut 0.

Le maximum est atteint à l'une des deux bornes : on compare $(-2)^2 = 4$ et $3^2 = 9$. Le plus grand est 9.

D'où le bon encadrement :

$$0 \leq x^2 \leq 9$$

La méthode quand l'intervalle contient 0. La borne inférieure est **toujours** 0 (le minimum de la fonction carré) et la borne supérieure est le **plus grand des deux carrés des bornes**. Ici 9 parce que 3 est plus loin de zéro que -2 .

Le contrôle sur plusieurs valeurs. $x = -2 \rightarrow 4$ ✓, $x = 0 \rightarrow 0$ ✓, $x = 1 \rightarrow 1$ ✓, $x = 3 \rightarrow 9$ ✓ : toutes ces images sont bien dans $[0; 9]$.

Le réflexe à installer. Avant d'encadrer un carré, regarder si l'intervalle contient 0. C'est le seul cas où la méthode change, et c'est celui qui est testé en évaluation.

Réponse. a) $x = 0$ donne $x^2 = 0$, ce qui contredit $4 \leq x^2$ — b) $0 \leq x^2 \leq 9$, car l'intervalle contient 0.

Correction de l'exercice 9 - Encadrer un inverse

a) L'intervalle $[2; 8]$ est contenu dans $]0; +\infty[$, où la fonction inverse est **décroissante** : l'ordre s'**inverse**.

$$2 \leq x \leq 8 \implies \frac{1}{2} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{8}$$

soit, dans l'ordre habituel :

$$\frac{1}{8} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0,125 \leq \frac{1}{x} \leq 0,5$$

Contrôle avec $x = 4$: $\frac{1}{4} = 0,25$, et $0,125 \leq 0,25 \leq 0,5$ ✓

b) L'intervalle $[-4; -1]$ est contenu dans $] -\infty; 0[$, où la fonction inverse est **également décroissante** :

$$-4 \leq x \leq -1 \implies \frac{1}{-4} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{-1}$$

soit :

$$-1 \leq \frac{1}{x} \leq -0,25$$

Contrôle avec $x = -2$: $\frac{1}{-2} = -0,5$, et $-1 \leq -0,5 \leq -0,25$ ✓

La condition indispensable. Dans les deux cas, l'intervalle ne contient **pas** 0. Avec un encadrement du type $-2 \leq x \leq 3$, la fonction inverse ne serait même pas définie partout, et il serait impossible d'encadrer $\frac{1}{x}$: les valeurs prises deviennent arbitrairement grandes des deux côtés de 0.

Le sens des bornes obtenues. En b), toutes les images sont **négatives**, ce qui est cohérent avec un x négatif. Un encadrement qui aurait donné des valeurs positives serait à reprendre.

Réponse. a) $0,125 \leq \frac{1}{x} \leq 0,5$ — b) $-1 \leq \frac{1}{x} \leq -0,25$.

Correction de l'exercice 10 - Un encadrement impossible

Non, c'est **impossible**. L'intervalle contient 0, et la fonction inverse y prend des valeurs arbitrairement grandes.

On le constate en calculant :

$$\frac{1}{0,1} = 10 \quad \frac{1}{0,001} = 1\,000$$

Or 0,1 et 0,001 appartiennent tous deux à $[-3; 2]$. En prenant x encore plus proche de 0, on obtiendrait 10 000, puis 1 000 000... Aucune borne supérieure ne peut convenir.

Du côté négatif, c'est le même phénomène en sens inverse :

$$\frac{1}{-0,001} = -1\,000$$

Aucune borne inférieure non plus.

Ce qu'il faut retenir. Pour encadrer $\frac{1}{x}$, l'intervalle de départ doit être **entièrement d'un seul côté de 0**. Sinon, l'encadrement n'existe pas — ce n'est pas une difficulté de méthode, c'est une impossibilité.

Le contraste avec la fonction carré. Un intervalle contenant 0 ne pose aucun problème au carré : il suffit de prendre 0 comme borne inférieure. La différence tient à ce que la fonction carré est **définie** en 0, alors que la fonction inverse ne l'est pas.

Si l'énoncé restreignait. Avec $0,5 \leq x \leq 2$, l'encadrement redeviendrait possible : $0,5 \leq \frac{1}{x} \leq 2$. C'est souvent ainsi que les énoncés sont formulés — en excluant 0 **et son voisinage**.

Réponse. Non : l'intervalle contient 0, et $\frac{1}{x}$ y prend des valeurs arbitrairement grandes (10 pour $x = 0,1$, 1 000 pour $x = 0,001$).

Correction de l'exercice 11 - Vrai ou faux sur les variations

a) **Faux.** Contre-exemple avec $a = -5$ et $b = 2$:

$$-5 < 2 \quad \text{mais} \quad 25 > 4$$

L'implication n'est vraie que si a et b sont **positifs**.

b) **Vrai.** C'est exactement la décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$. Par exemple $2 < 5$ donne $\frac{1}{2} = 0,5 > 0,2 = \frac{1}{5}$.

c) **Faux.** Contre-exemple avec $a = 0,5$:

$$0,5^2 = 0,25 \quad \text{et} \quad 0,25 < 0,5$$

L'affirmation n'est vraie que pour $x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

d) **Faux.** Contre-exemple avec $a = 0,25$:

$$\frac{1}{0,25} = 4 \quad \text{et} \quad 4 > 0,25$$

Elle est également fautive pour tous les négatifs entre -1 et 0 : avec $a = -0,5$, on a $\frac{1}{-0,5} = -2 < -0,5$, donc là elle est vraie — mais avec $a = -2$, $\frac{1}{-2} = -0,5 > -2$, donc fautive.

La méthode pour ces questions. Une affirmation universelle est réfutée par **un seul** contre-exemple ; elle est démontrée par une **propriété** générale. Chercher le contre-exemple d'abord fait gagner du temps : s'il n'en existe pas, on a compris pourquoi l'affirmation est vraie.

Où chercher les contre-exemples. Trois zones concentrent presque tous les cas : les **négatifs**, l'intervalle $]0; 1[$, et la valeur 0 elle-même. Les affirmations fautes de cet exercice viennent toutes de l'une de ces trois zones.

Réponse. a) faux ($-5 < 2$ mais $25 > 4$) — b) vrai (décroissance de l'inverse sur les positifs) — c) faux ($0,5^2 = 0,25$) — d) faux ($\frac{1}{0,25} = 4$).

Correction de l'exercice 12 - Encadrer une expression composée

a) L'intervalle $[1; 4]$ est inclus dans les positifs, où la fonction carré est **croissante** :

$$1 \leq x \leq 4 \implies 1 \leq x^2 \leq 16$$

b) Ajouter une constante ne change **pas le sens** des inégalités : on ajoute 3 aux trois membres.

$$1 \leq x^2 \leq 16 \implies 1 + 3 \leq x^2 + 3 \leq 16 + 3 \implies 4 \leq x^2 + 3 \leq 19$$

c) Sur $[1; 4]$, la fonction inverse est **décroissante**, donc l'ordre s'inverse :

$$1 \leq x \leq 4 \implies \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

Multiplier par 5, qui est **positif**, conserve le sens :

$$\frac{5}{4} \leq \frac{5}{x} \leq 5 \quad \text{soit} \quad 1,25 \leq \frac{5}{x} \leq 5$$

Les deux règles de manipulation. Ajouter un nombre (de n'importe quel signe) ne change jamais le sens d'une inégalité. Multiplier par un nombre **positif** non plus ; multiplier par un nombre **négatif** l'inverse.

Le contrôle par une valeur. Prenons $x = 2$: $x^2 + 3 = 7$, et $4 \leq 7 \leq 19$ ✓ ; $\frac{5}{x} = 2,5$, et $1,25 \leq 2,5 \leq 5$ ✓

L'ordre des opérations. On encadre toujours la quantité **la plus intérieure** en premier (x^2 , puis $x^2 + 3$). Vouloir tout faire d'un coup est la source d'erreurs la plus fréquente sur ce type d'exercice.

Réponse. a) $1 \leq x^2 \leq 16$ — b) $4 \leq x^2 + 3 \leq 19$ — c) $0,25 \leq \frac{1}{x} \leq 1$ puis $1,25 \leq \frac{5}{x} \leq 5$.

Correction de l'exercice 13 - Comparer sans calculer

Le nombre 0,9 est compris **entre 0 et 1**, ce qui détermine tout.

Comparaison de A et C. Pour $0 < x < 1$, on a $x^2 < x$: élever au carré un nombre inférieur à 1 le rapetisse. Donc

$$A = 0,81 < 0,9 = C$$

Comparaison de C et D. Évidemment $0,9 < 1$.

Comparaison de D et B. Pour $0 < x < 1$, on a $\frac{1}{x} > 1$: l'inverse d'un nombre inférieur à 1 dépasse 1. Donc

$$D = 1 < \frac{1}{0,9} = B$$

En rassemblant :

$$A < C < D < B \quad \text{soit} \quad 0,9^2 < 0,9 < 1 < \frac{1}{0,9}$$

Contrôle par les valeurs : $0,81 < 0,9 < 1 < 1,11$ ✓

La règle générale pour $0 < x < 1$. Les quatre quantités se rangent toujours dans cet ordre :

$$x^2 < x < 1 < \frac{1}{x}$$

Et pour $x > 1$? Tout s'inverse :

$$\frac{1}{x} < 1 < x < x^2$$

À vérifier avec $x = 2$: $0,5 < 1 < 2 < 4$ ✓ Ces deux chaînes, mémorisées, dispensent de calculer dans la plupart des exercices de comparaison.

Réponse. $A < C < D < B$, soit $0,81 < 0,9 < 1 < 1,11$; pour $0 < x < 1$ on a toujours $x^2 < x < 1 < \frac{1}{x}$.

Correction de l'exercice 14 - Une erreur de raisonnement

a) On calcule :

$$\frac{1}{-4} = -0,25 \quad \frac{1}{-1} = -1$$

Or $-0,25 > -1$: la conclusion de l'élève est **fausse**.

b) L'erreur porte sur le **sens** de la décroissance. Une fonction décroissante **inverse** l'ordre : si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$. L'élève a conservé l'ordre alors qu'il fallait le renverser.

Le raisonnement correct :

$$-4 < -1 \quad \text{et l'inverse est décroissante sur }]-\infty; 0[\quad \text{donc} \quad \frac{1}{-4} > \frac{1}{-1}$$

soit $-0,25 > -1$ ✓

La source probable de la confusion. Comparer deux nombres **négatifs** est déjà déroutant : $-0,25$ « a l'air » plus petit que -1 parce que $0,25 < 1$. Il faut se rappeler que sur la droite graduée, $-0,25$ est **à droite** de -1 , donc plus grand.

Le réflexe de sécurité. Face à une comparaison de nombres négatifs, poser mentalement les deux valeurs sur une droite graduée, ou tout simplement **calculer** quand c'est possible — comme ici. Une comparaison contredite par le calcul est une comparaison à reprendre.

La rédaction juste. Elle comporte trois éléments : l'inégalité de départ, le nom de la propriété avec **son intervalle**, et l'inégalité d'arrivée dans le bon sens. Chacun des trois est attendu.

Réponse. a) $\frac{1}{-4} = -0,25$ et $\frac{1}{-1} = -1$ — b) la décroissance **inverse** l'ordre : $\frac{1}{-4} > \frac{1}{-1}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un encadrement en deux temps

a) L'intervalle $[-3; -1]$ est inclus dans $]-\infty; 0]$, où la fonction carré est **décroissante** : l'ordre s'inverse.

$$-3 \leq x \leq -1 \implies (-3)^2 \geq x^2 \geq (-1)^2 \implies 1 \leq x^2 \leq 9$$

b) Sur le même intervalle, la fonction inverse est **décroissante** également :

$$-3 \leq x \leq -1 \implies \frac{1}{-3} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{-1} \implies -1 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{3}$$

c) On repart de l'encadrement de x^2 obtenu en a). Les trois membres sont **strictement positifs**, et la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$:

$$1 \leq x^2 \leq 9 \implies \frac{1}{9} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$$

d) Pour $x = -2$, qui appartient bien à $[-3; -1]$:

$$x^2 = 4 \quad \text{et} \quad 1 \leq 4 \leq 9 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{x} = -0,5 \quad \text{et} \quad -1 \leq -0,5 \leq -\frac{1}{3} \approx -0,33 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{x^2} = 0,25 \quad \text{et} \quad \frac{1}{9} \approx 0,11 \leq 0,25 \leq 1 \quad \checkmark$$

Pourquoi enchaîner plutôt que tout refaire. Pour la question c), il aurait été tentant de repartir de $-3 \leq x \leq -1$. Mais $\frac{1}{x^2}$ s'obtient bien plus sûrement **à partir de**

l'encadrement de x^2 , où les trois membres sont positifs : on applique alors une seule règle, celle des positifs.

Le point de vigilance de la question c). L'encadrement de x^2 ne contient pas 0 (il commence à 1), donc l'inverse est bien défini partout. Si l'intervalle de départ avait contenu 0, la question n'aurait pas eu de réponse.

Le bilan de la plaquette. Trois gestes : repérer le **signe** des nombres, nommer le **sens de variation** sur l'intervalle concerné, inverser l'ordre si la fonction décroît. Et toujours tester une valeur pour valider.

Réponse. a) $1 \leq x^2 \leq 9$ — b) $-1 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{3}$ — c) $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$ — d) avec $x = -2$: 4, $-0,5$ et $0,25$, tous dans les intervalles ✓