Plaquette 3 – Courbes, symétries et lecture graphique

Fonction carré et fonction inverse — Seconde

Exercices

Méthode

Deux courbes à reconnaître au premier coup d'œil : la **parabole** de la fonction carré, en forme de vallée posée sur l'origine, et l'**hyperbole** de la fonction inverse, en deux branches opposées qui n'en finissent pas de s'approcher des axes sans jamais les toucher. Chacune porte une symétrie qui traduit une égalité algébrique : $(-x)^2 = x^2$ donne un axe de symétrie, $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ donne un centre. Sur un graphique, on lit une **image** en partant de l'axe des abscisses, un **antécédent** en partant de l'axe des ordonnées — et l'on résout une équation en cherchant les **points d'intersection** de deux courbes, une inéquation en regardant **laquelle est au-dessus**. Une lecture graphique donne toujours des valeurs approchées : on la confirme par le calcul dès que c'est possible.

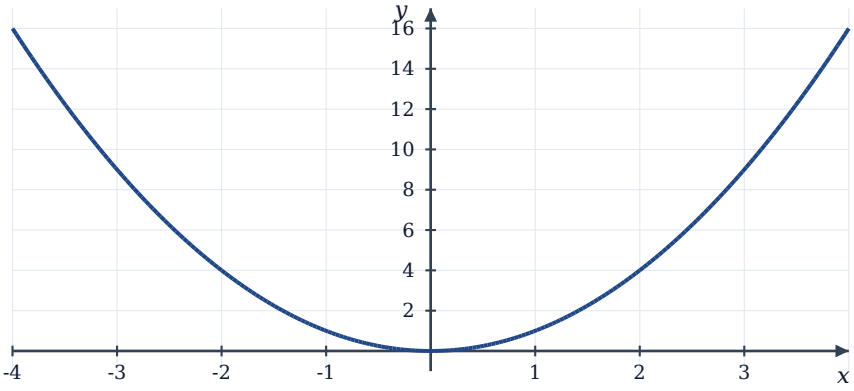
Exercice 1 – Lire la parabole

La courbe ci-dessous est celle de la fonction carré.

a) Lire graphiquement $f(2)$ et $f(-3)$.

b) Lire les antécédents de 4.

c) Combien -2 a-t-il d'antécédents ? Justifier graphiquement.



La parabole, courbe de la fonction carré.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

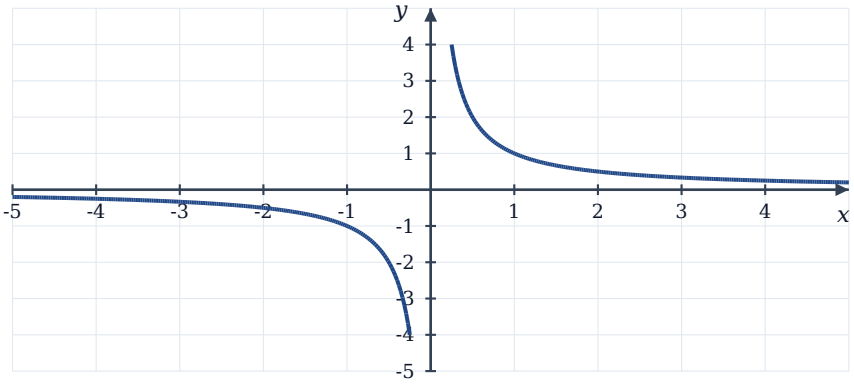
Exercice 2 – Lire l’hyperbole

La courbe ci-dessous est celle de la fonction inverse.

a) Lire graphiquement $g(2)$ et $g(-1)$.

b) Lire l’antécédent de 2.

c) La courbe coupe-t-elle l’axe des abscisses ? l’axe des ordonnées ?



L'hyperbole, courbe de la fonction inverse, en deux branches.

Exercice 3 – La symétrie de la parabole

a) Calculer $f(-4)$ et $f(4)$, puis $f(-1{,}5)$ et $f(1{,}5)$ pour la fonction carré.

b) Que peut-on dire des points de la parabole d’abscisses opposées ?

c) Démontrer que pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, et en déduire la nature de la symétrie de la courbe.

Exercice 4 – La symétrie de l’hyperbole

Soit g la fonction inverse.

a) Calculer $g(-4)$ et $g(4)$, puis $g(-0{,}5)$ et $g(0{,}5)$.

b) Démontrer que pour tout $x \neq 0$, $g(-x) = -g(x)$.

c) En déduire la nature de la symétrie de l’hyperbole, et la comparer à celle de la parabole.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

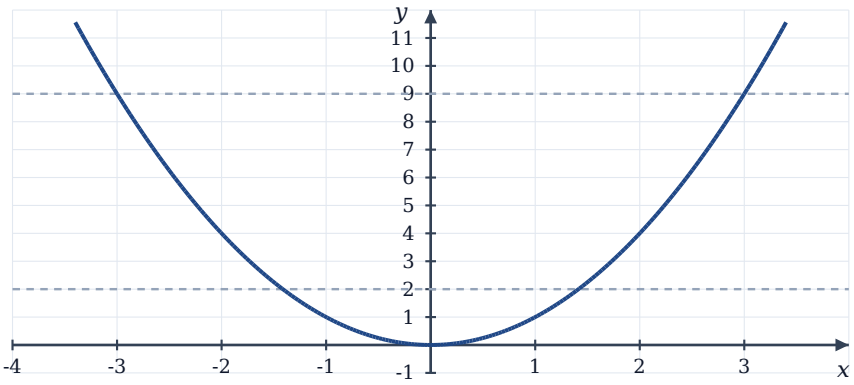
Exercice 5 – Résoudre graphiquement une équation

À l'aide du graphique ci-dessous, résoudre graphiquement les équations suivantes, puis confirmer par le calcul lorsque c'est possible.

a) $x^2 = 9$

b) $x^2 = 2$

c) $x^2 = 0$



La parabole et les droites $y = 9$ (en haut) et $y = 2$.

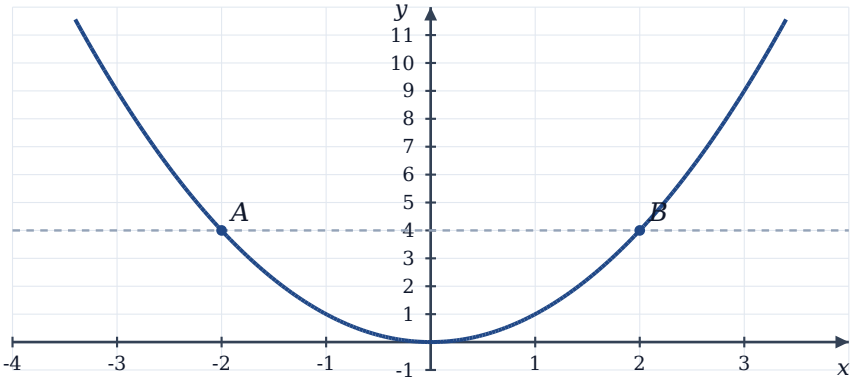
Exercice 6 – Résoudre graphiquement une inéquation

Sur le graphique ci-dessous figurent la parabole et la droite d'équation $y = 4$.

a) Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 \leq 4$.

b) Résoudre graphiquement $x^2 > 4$.

c) Donner les deux ensembles de solutions sous forme d'intervalles.



Position de la parabole par rapport à la droite $y = 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

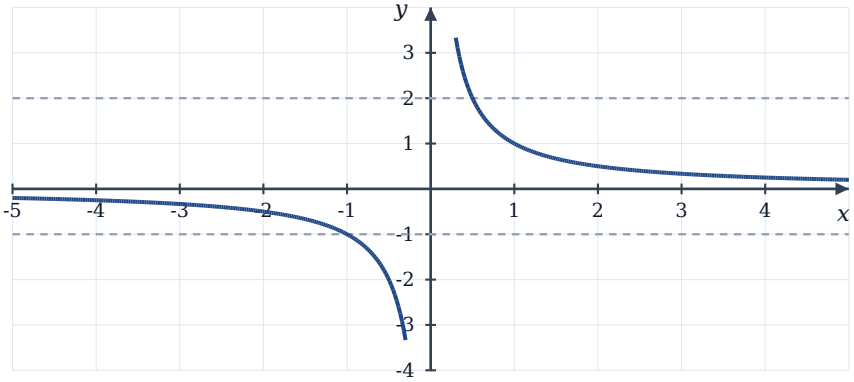
Exercice 7 – Lecture graphique sur l'hyperbole

Le graphique ci-dessous représente la fonction inverse ainsi que deux droites horizontales.

a) Résoudre graphiquement $\frac{1}{x} = 2$, puis $\frac{1}{x} = -1$.

b) Confirmer chaque résultat par le calcul.

c) Combien de solutions l'équation $\frac{1}{x} = k$ a-t-elle selon la valeur de k ?



L'hyperbole et les droites $y = 2$ (en haut) et $y = -1$.

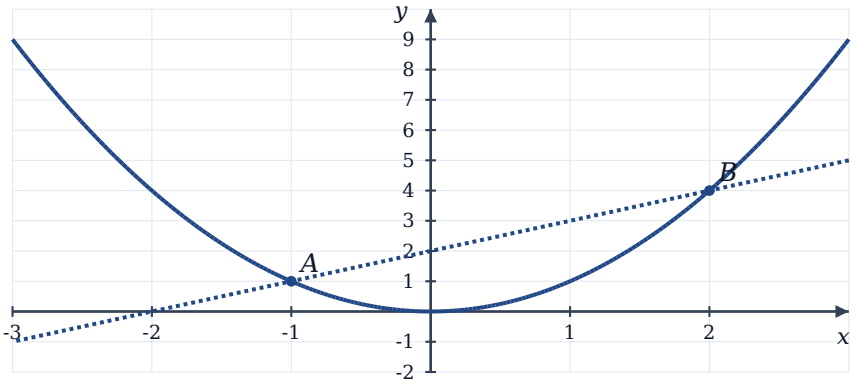
Exercice 8 – Parabole et droite

Le graphique ci-dessous présente la parabole et la droite d'équation $y = x + 2$.

a) Lire les coordonnées des points d'intersection.

b) En déduire les solutions de l'équation $x^2 = x + 2$, et les vérifier par le calcul.

c) Résoudre graphiquement $x^2 \leq x + 2$.



La parabole (trait plein) et la droite $y = x + 2$ (pointillés).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

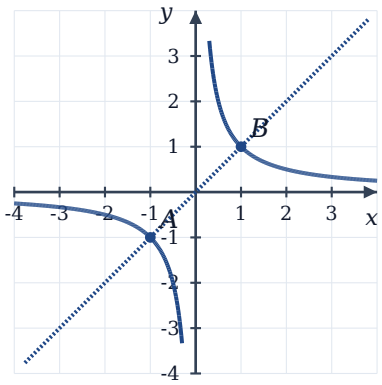
Exercice 9 – Hyperbole et droite

Sur le graphique ci-dessous figurent l'hyperbole et la droite d'équation $y = x$.

a) Lire les coordonnées des points d'intersection.

b) En déduire les solutions de $\frac{1}{x} = x$, puis les vérifier.

c) Déterminer graphiquement les valeurs de x pour lesquelles $\frac{1}{x} > x$.



L'hyperbole (trait plein) et la droite $y = x$ (pointillés).

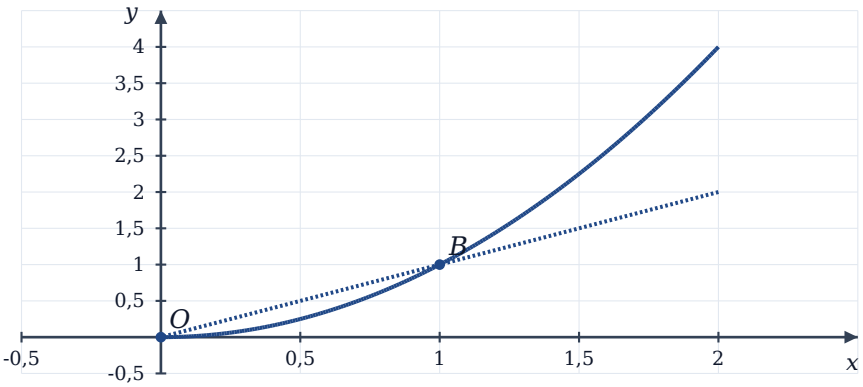
Exercice 10 – Comparer les deux courbes

Le graphique ci-dessous présente la parabole et la droite d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0\,;2]$.

a) Lire les coordonnées des deux points communs.

b) Sur quel intervalle la parabole est-elle en dessous de la droite ?

c) Que retrouve-t-on ainsi ?



La parabole (trait plein) et la droite $y = x$ (pointillés) sur $[0\,;2]$.

Exercice 11 – Reconnaître une courbe

Quatre affirmations décrivent une courbe. Pour chacune, dire s'il s'agit de la parabole, de l'hyperbole, ou d'aucune des deux.

a) « Elle est formée de deux morceaux séparés et ne coupe aucun axe. »

b) « Elle passe par $(0\,;0)$ et par $(-2\,;4)$. »

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) « Elle est symétrique par rapport à l'origine et passe par $(0{,}5\,;2)$. »

d) « Elle est entièrement située au-dessus de l'axe des abscisses et symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. »

Exercice 12 – Tracer la parabole point par point

a) Compléter le tableau de valeurs suivant.

x	$-2{,}5$	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	$2{,}5$
x^2									

b) Expliquer comment tracer la courbe en ne calculant que la moitié des valeurs.

c) Pourquoi la courbe n'a-t-elle pas de « pointe » en 0 ?

Exercice 13 – Une lecture approchée

a) Sur la parabole, lire une valeur approchée de $f(1{,}7)$, puis calculer la valeur exacte. Quel est l'écart ?

b) Sur l'hyperbole, lire une valeur approchée de $g(3)$, puis calculer la valeur exacte.

c) Que conclure sur la fiabilité d'une lecture graphique ?

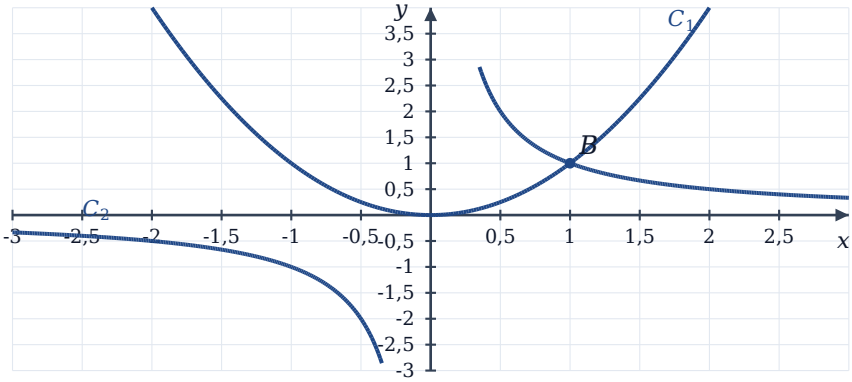
Exercice 14 – Deux courbes à identifier

Le graphique ci-dessous présente deux courbes, notées C_1 et C_2.

a) Identifier chacune d'elles en justifiant par deux arguments.

b) Lire leurs points communs.

c) Pour quelles valeurs de x strictement positives a-t-on $x^2 < \frac{1}{x}$?



Deux courbes de référence dans un même repère.

Exercice 15 – Synthèse graphique

On considère la fonction carré f et la fonction inverse g.

a) Sur quel intervalle les deux fonctions varient-elles dans le même sens ? dans des sens contraires ?

b) Une horizontale $y = k$ coupe-t-elle toujours les deux courbes ? Discuter selon le

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

signe de k.

c) Rassembler dans un tableau le nombre de solutions de $x^2 = k$ et de $\frac{1}{x} = k$ selon k.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).