

Plaquette 4 - Équations et inéquations

Fonction carré et fonction inverse — Seconde

Exercices

Méthode

Tout part de deux modèles. Pour $x^2 = k$, la discussion selon le **signe de k** donne deux solutions, une seule ou aucune ; pour $\frac{1}{x} = k$, il y en a toujours exactement une dès que $k \neq 0$. Les équations plus riches se ramènent à ces modèles par **factorisation** — identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, facteur commun — puis par la règle du **produit nul** : un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est. Côté inéquations, deux réflexes suffisent. $x^2 \leq k$ donne un **intervalle centré** en 0, $x^2 \geq k$ une **réunion** de deux intervalles ; et pour l'inverse, on **sépare les cas** $x > 0$ et $x < 0$ avant toute multiplication, puisque multiplier par un nombre négatif renverse l'inégalité. Une équation avec dénominateur commence toujours par la recherche des **valeurs interdites**.

Exercice 1 - Quatre équations du type $x^2 = k$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$x^2 = 16 \quad x^2 = 0,09 \quad x^2 = 7 \quad x^2 = -3$$

Exercice 2 - Avec des fractions

Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions sous forme de fractions.

$$x^2 = \frac{25}{9} \quad x^2 = \frac{5}{4} \quad 4x^2 = 9$$

Exercice 3 - Un carré décalé

Résoudre les équations suivantes.

- a) $(x - 1)^2 = 9$
- b) $(x + 4)^2 = 2$
- c) $(2x - 3)^2 = 25$

Exercice 4 - Résoudre par factorisation

Résoudre les équations suivantes en factorisant d'abord le membre de gauche.

- a) $x^2 - 49 = 0$
- b) $x^2 - 5 = 0$
- c) $9x^2 - 16 = 0$

Exercice 5 - Une équation avec facteur commun

- a) Résoudre $x^2 = 3x$.
- b) Anaïs divise les deux membres par x et obtient $x = 3$. Qu'a-t-elle oublié ?

c) Résoudre $2x^2 + 7x = 0$.

Exercice 6 - Équations avec la fonction inverse

Résoudre les équations suivantes.

a) $\frac{1}{x} = 5$

b) $\frac{1}{x} = -\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{x} = 0$

d) $\frac{3}{x} = 12$

Exercice 7 - Valeurs interdites et équation

On considère l'équation $\frac{1}{x-2} = 3$.

a) Déterminer la valeur interdite.

b) Résoudre l'équation.

c) Même travail avec $\frac{1}{x+5} = -\frac{1}{2}$.

Exercice 8 - Inéquations avec un carré

Résoudre les inéquations suivantes et donner les solutions sous forme d'intervalles.

a) $x^2 \leq 25$

b) $x^2 > 9$

c) $x^2 \leq 3$

Exercice 9 - Deux inéquations particulières

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, en justifiant.

a) $x^2 \geq 0$

b) $x^2 < -4$

c) $x^2 > 0$

d) $x^2 \leq 0$

Exercice 10 - Signe de l'inverse

a) Résoudre $\frac{1}{x} > 0$, puis $\frac{1}{x} < 0$.

b) L'inéquation $\frac{1}{x} \geq 0$ a-t-elle les mêmes solutions que $\frac{1}{x} > 0$? Justifier.

c) Résoudre $\frac{-2}{x} > 0$.

Exercice 11 - Une inéquation avec un inverse

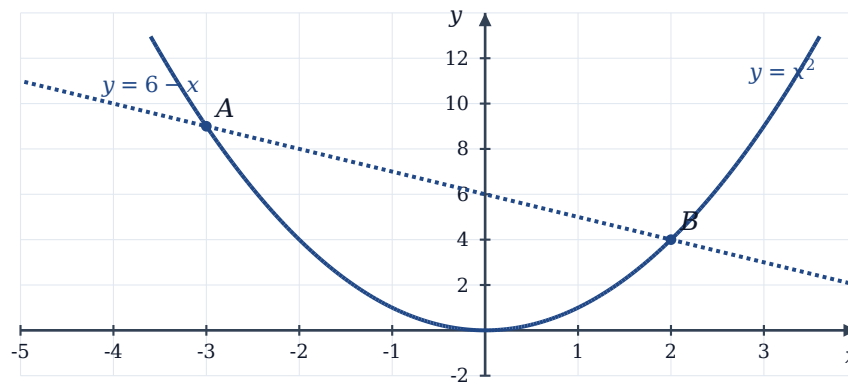
On souhaite résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} \leq 2$.

- Pourquoi ne peut-on pas multiplier directement les deux membres par x ?
- Résoudre l'inéquation en séparant les cas $x > 0$ et $x < 0$.
- Vérifier avec $x = -1$, $x = 0,25$ et $x = 3$.

Exercice 12 - Résoudre à partir d'un graphique

Le graphique ci-dessous présente la parabole et la droite d'équation $y = 6 - x$.

- Lire les solutions de l'équation $x^2 = 6 - x$.
- Vérifier par le calcul que $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$, puis retrouver les solutions.
- Résoudre graphiquement $x^2 \geq 6 - x$.



La parabole et la droite $y = 6 - x$.

Exercice 13 - Comparer deux expressions

On pose $A = x^2$ et $B = 4x$.

- Factoriser $A - B$.
- En déduire le signe de $A - B$ selon les valeurs de x , à l'aide d'un tableau de signes.
- Conclure sur la comparaison de x^2 et de $4x$.

Exercice 14 - Une équation à rejeter

On considère l'équation $\frac{1}{x-3} = \frac{1}{2x-6}$.

- Déterminer les valeurs interdites.
- Résoudre l'équation.
- Conclure.

Exercice 15 - Synthèse : équations et inéquations mêlées

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en précisant à chaque fois la méthode employée.

- $3x^2 - 27 = 0$

b) $x^2 \leq 2x$

c) $\frac{1}{x} \geq 1$

d) $(x + 2)^2 = 16$