

Plaque 5 – Problèmes de synthèse

Fonction carré et fonction inverse – Seconde

Exercices

Méthode

Les deux fonctions de référence modélisent deux situations que l'on rencontre partout. Le **carré** apparaît dès qu'une grandeur dépend de deux dimensions qui varient ensemble — une aire, une distance de freinage, une chute — et il produit des croissances brutales : doubler la cause **quadruple** l'effet. L'**inverse** apparaît dès qu'un total est **fixé et partagé** — une durée à distance donnée, une part par personne, une longueur à aire constante — et il produit des décroissances qui s'amortissent : doubler le diviseur **divise l'effet par deux**, mais quadrupler ne le divise que par quatre, de moins en moins sensiblement. Le travail est toujours le même : traduire l'énoncé en une expression, calculer une image pour répondre à « combien », résoudre une équation pour répondre à « pour quelle valeur » — et **écarter les solutions que le contexte interdit**, à commencer par les longueurs négatives.

Exercice 1 – L'aire d'un carré

Un carré a un côté de x centimètres.

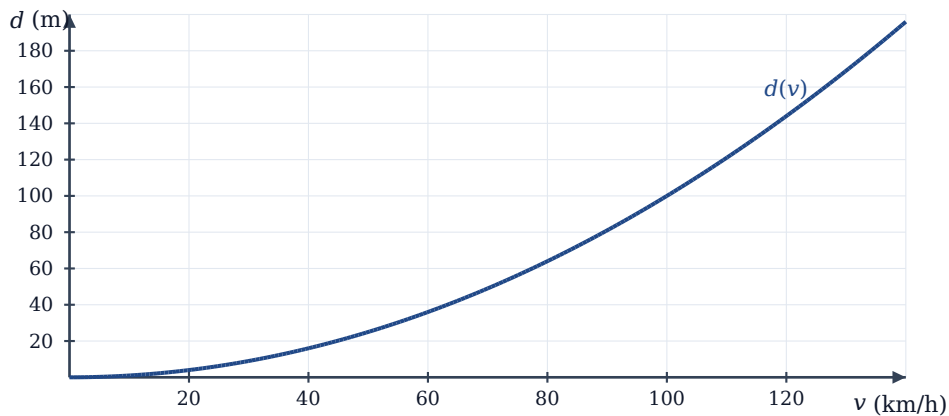
- Exprimer son aire $A(x)$ et son périmètre $P(x)$.
- Calculer l'aire pour $x = 6$ cm, puis pour $x = 12$ cm. Par combien l'aire est-elle multipliée quand le côté double ?
- Quel côté donne une aire de 30 cm^2 ? Arrondir au dixième.
- Pour quels côtés l'aire dépasse-t-elle le périmètre ?

Exercice 2 - La distance de freinage

Sur route sèche, la distance de freinage d , en mètres, d'une voiture roulant à v kilomètres par heure est bien approchée par

$$d(v) = \frac{v^2}{100}$$

- Calculer la distance de freinage à 50 km/h, puis à 100 km/h.
- Que devient la distance de freinage quand la vitesse double ?
- À quelle vitesse la distance de freinage atteint-elle 64 mètres ?



Distance de freinage en fonction de la vitesse.

Exercice 3 - Un trajet à vitesse variable

Un automobiliste doit parcourir 120 kilomètres. On note $t(v)$ la durée du trajet, en heures, pour une vitesse moyenne de v km/h.

- Exprimer $t(v)$. De quel type de fonction s'agit-il ?
- Calculer la durée pour $v = 60$, puis $v = 80$ et $v = 100$ km/h.
- Quelle vitesse moyenne permet de faire le trajet en 1 h 20 min ?
- Gagne-t-on autant de temps en passant de 60 à 80 qu'en passant de 80 à 100 km/h ?

Exercice 4 - Partager une somme

Un groupe d'amis se partage équitablement une facture de 240 euros. On note $p(n)$ la part de chacun, en euros, pour n participants.

- Exprimer $p(n)$.
- Calculer la part pour 8, puis pour 10 et 12 participants.
- Combien faut-il de participants pour que la part descende à 16 euros ?
- La part peut-elle descendre en dessous de 10 euros ? À partir de combien de participants ?

Exercice 5 - L'aire d'un disque

L'aire d'un disque de rayon r centimètres est $A(r) = \pi r^2$.

- Calculer l'aire d'un disque de rayon 3 cm, en valeur exacte puis arrondie au

dixième.

b) Quel rayon donne une aire de 50 cm^2 ? Arrondir au centième.

c) Une pizza de 30 cm de diamètre coûte 12 €, une de 40 cm coûte 18 €. Laquelle offre le meilleur rapport quantité-prix ?

Exercice 6 - Un rectangle d'aire constante

Un rectangle a une aire de 36 cm^2 . On note x sa largeur, en centimètres, et $L(x)$ sa longueur.

a) Exprimer $L(x)$.

b) Compléter le tableau ci-dessous.

Largeur x	2	3	4	6	9
Longueur $L(x)$					

c) Pour quelle largeur le rectangle est-il un carré ?

d) Exprimer le périmètre $P(x)$ et le calculer pour $x = 2$ et $x = 6$. Que remarque-t-on ?

Exercice 7 - L'intensité lumineuse

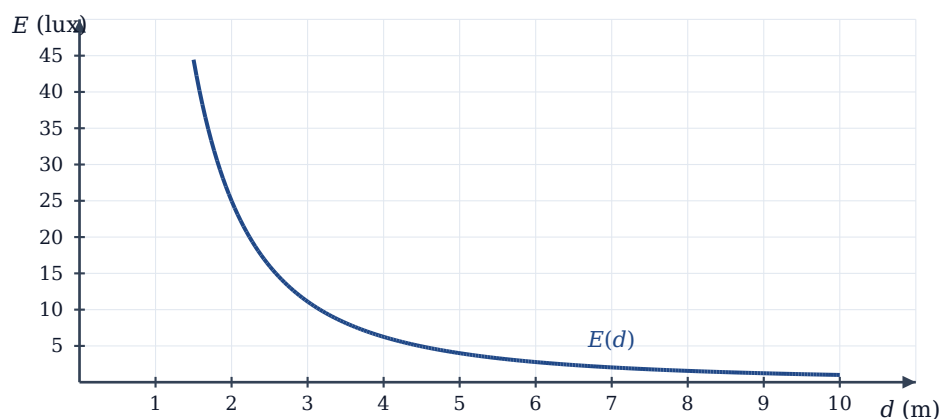
L'éclairement produit par une lampe décroît avec le carré de la distance. À d mètres de la lampe, il vaut

$$E(d) = \frac{100}{d^2} \quad (\text{en lux})$$

a) Calculer l'éclairement à 2 m, puis à 5 m.

b) Que devient l'éclairement quand on double la distance ?

c) À quelle distance l'éclairement vaut-il 4 lux ?



Éclairement en fonction de la distance à la lampe.

Exercice 8 - Une chute libre

Un objet lâché sans vitesse initiale parcourt, en t secondes, une distance de chute d'environ

$$h(t) = 5t^2 \quad (\text{en mètres})$$

- a) Quelle distance a-t-il parcourue au bout de 2 s ? de 3 s ?
- b) Combien de temps met-il pour tomber de 45 mètres ?
- c) Un objet lâché du haut d'une falaise touche l'eau au bout de 4 secondes. Quelle est la hauteur de la falaise ?

Exercice 9 - Un voyage en autocar

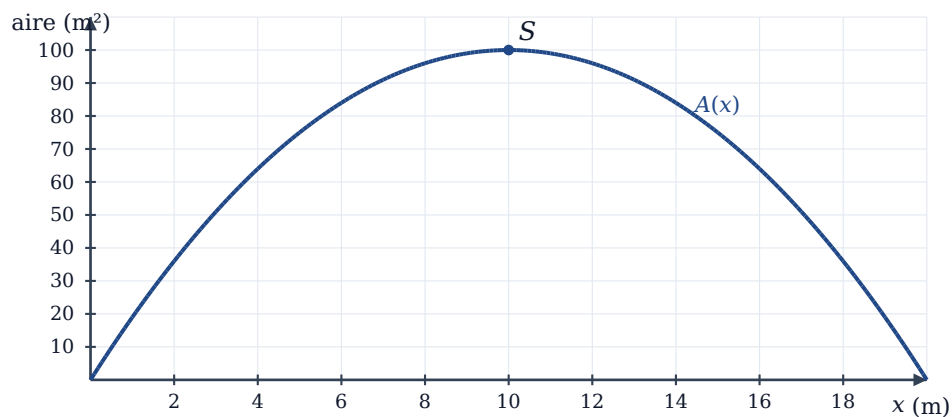
La location d'un autocar coûte 480 euros, partagés entre les participants. On note $c(n)$ le coût par personne pour n participants.

- a) Exprimer $c(n)$ et calculer le coût pour 16, puis 24 et 32 participants.
- b) À partir de combien de participants le coût par personne descend-il sous 18 euros ?
- c) Le car ne peut accueillir que 50 personnes. Quel est le coût minimal par personne ?

Exercice 10 - Un enclos rectangulaire

Un éleveur dispose de 40 mètres de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire. On note x la largeur, en mètres.

- a) Exprimer la longueur en fonction de x , puis l'aire $A(x)$.
- b) Vérifier que $A(x) = 100 - (x - 10)^2$.
- c) En déduire la largeur qui rend l'aire maximale, et cette aire maximale.



Aire de l'enclos selon la largeur.

Exercice 11 - Une dilution

On dissout 60 grammes de sel dans un volume V de litres d'eau. La concentration obtenue, en grammes par litre, est $c(V) = \frac{60}{V}$.

- a) Calculer la concentration pour $V = 2$ L, puis $V = 5$ L.
- b) Quel volume d'eau donne une concentration de 4 g/L ?
- c) Peut-on atteindre une concentration nulle ? Et une concentration de 100 g/L ?

Exercice 12 – Reconnaître le bon modèle

Pour chaque situation, dire si la grandeur étudiée dépend de x selon un modèle **affine**, **carré** ou **inverse**, en justifiant.

- a) Le prix payé pour x kilos de pommes à 3 € le kilo.
- b) L'aire d'un carré de côté x .
- c) Le temps mis pour remplir une piscine de 60 m^3 avec un débit de $x \text{ m}^3/\text{h}$.
- d) Le volume d'un cube d'arête x .
- e) Le coût par personne d'un cadeau de 90 € partagé entre x amis.

Exercice 13 – Un encadrement dans un contexte

Une plaque carrée est découpée avec une tolérance : son côté x , en centimètres, vérifie $9,8 \leq x \leq 10,2$.

- a) Encadrer l'aire de la plaque.
- b) L'aire visée est de 100 cm^2 . Quel est l'écart maximal, en cm^2 , par rapport à cette valeur ?
- c) Une erreur de 2 % sur le côté entraîne-t-elle une erreur de 2 % sur l'aire ?

Exercice 14 – Comparer deux tarifs d'impression

Une photo carrée de côté x centimètres est imprimée. Le tarif A facture 0,05 € par centimètre carré. Le tarif B facture 2 € forfaitaires plus 0,03 € par centimètre carré.

- a) Exprimer les coûts $A(x)$ et $B(x)$ en fonction du côté x .
- b) Calculer les deux coûts pour une photo de 10 cm de côté.
- c) Vérifier que $A(x) = B(x)$ pour $x = 10$, et déterminer pour quels côtés le tarif A est le moins cher.

Exercice 15 – Synthèse : un bassin à remplir

Un bassin carré de côté x mètres et de profondeur 1,5 m doit être rempli.

- a) Exprimer le volume $V(x)$, en mètres cubes.
- b) Calculer le volume pour $x = 4$ m. Combien de temps faut-il pour le remplir avec un débit de $3 \text{ m}^3/\text{h}$?
- c) On dispose d'un volume d'eau de 96 m^3 . Quel côté peut-on remplir exactement ?
- d) On remplit un bassin de 54 m^3 . Exprimer la durée $t(q)$ du remplissage en fonction du débit q , puis déterminer le débit nécessaire pour un remplissage en 4 h 30 min.