MATHÉMATIQUES

Fonction carré et fonction inverse

Seconde

Fonction carré • Parabole • Fonction inverse • Hyperbole
Variations • Équations $x^2 = k$ • Inéquations • Comparaisons

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques de seconde générale et technologique** (arrêté du 26 février 2026, BO n°14 du 2 avril 2026, rentrée 2026). Il couvre :

- fonctions carré et inverse : définitions et courbes représentatives ;
- signe et variations de la fonction carré, variations de la fonction inverse (**démonstrations** au programme) ;
- position relative des courbes d'équations $y = x$ et $y = x^2$ pour $x \geq 0$ (**démonstration** au programme) ;
- résolution graphique ou algébrique de $f(x) = k$ et $f(x) < k$;
- comparaison de $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.

Objectif : connaître les courbes des fonctions carré et inverse, démontrer leurs variations et s'en servir pour résoudre et comparer.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 La fonction carré **3**
1.1 Définition et courbe 3
1.2 Signe et variations 3
1.3 Équations et inéquations avec un carré 4

2 Position relative des courbes $y = x$ et $y = x^2$ pour $x \geq 0$ **5**

3 La fonction inverse **6**
3.1 Définition et courbe 6
3.2 Signe et variations 6
3.3 Équations et inéquations avec un inverse 7

4 Comparer les deux fonctions de référence **8**

5 Méthodes et erreurs classiques **8**

6 Fiche de synthèse **9**

7 Exercices d'application **9**

8 Corrigés des exercices **9**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

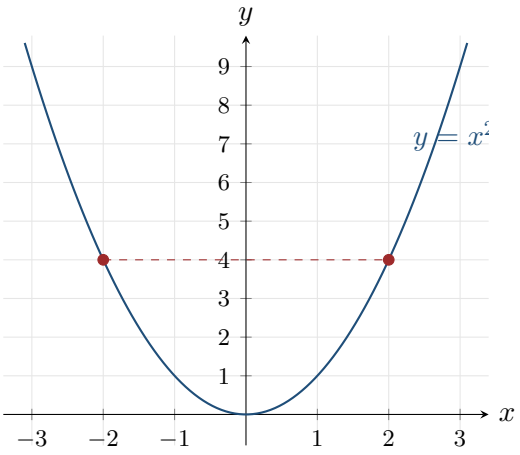
1. La fonction carré

1.1. Définition et courbe

Fonction carré

La fonction **carré** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Sa courbe représentative s'appelle une **parabole** ; son point le plus bas, l'origine O, est le **sommet** de la parabole.

x	-3	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	3
x^2	9	4	1	$0{,}25$	0	$0{,}25$	1	4	9



La parabole $y = x^2$: les points d'abscisses -2 et 2 ont la même ordonnée 4.

Symétrie de la parabole

Pour tout réel x, $(-x)^2 = x^2$: deux nombres opposés ont le même carré. Les points $(x\,;x^2)$ et $(-x\,;x^2)$ sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, qui est un **axe de symétrie** de la parabole.

1.2. Signe et variations

Signe de la fonction carré

Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$, et $x^2 = 0 \iff x = 0$. La parabole est au-dessus de l'axe des abscisses et ne le touche qu'en O.

Variations de la fonction carré

La fonction carré est **strictement décroissante** sur $]-\infty\,;0]$ et **strictement croissante** sur $[0\,;+\infty[$. Elle admet un minimum égal à 0, atteint en 0.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		↘	0	↗	

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Démonstration. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On étudie le signe de la différence

$$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a).$$

Le facteur $b - a$ est strictement positif puisque $a < b$.

— Si $0 \leq a < b$, alors $b+a > 0$, donc $b^2 - a^2 > 0$, soit $a^2 < b^2$: l'ordre est conservé, la fonction est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

— Si $a < b \leq 0$, alors $b+a < 0$, donc $b^2 - a^2 < 0$, soit $a^2 > b^2$: l'ordre est inversé, la fonction est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

Comparer deux carrés

— Deux nombres **positifs** sont rangés dans le même ordre que leurs carrés : $2{,}1 < 2{,}3 \implies 2{,}1^2 < 2{,}3^2$.

— Deux nombres **négatifs** sont rangés dans l'ordre inverse de leurs carrés : $-5 < -4 \implies (-5)^2 > (-4)^2$.

— Si les signes diffèrent, on compare les distances à 0 : $(-3)^2 = 9 > 2^2 = 4$ car $|-3| > |2|$.

« Plus grand donc carré plus grand » est faux

$-5 < 2$ mais $(-5)^2 = 25 > 4 = 2^2$. La fonction carré n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$: il faut toujours regarder le signe des nombres comparés.

1.3. Équations et inéquations avec un carré

Équation $x^2 = k$

— Si $k > 0$: deux solutions, $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$.

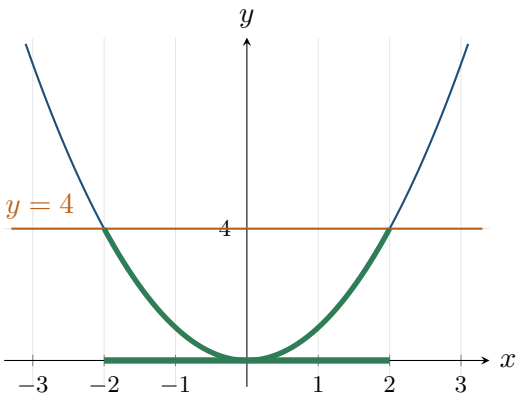
— Si $k = 0$: une seule solution, 0.

— Si $k < 0$: aucune solution, car un carré est positif.

Graphiquement, on compte les points d'intersection de la parabole avec la droite horizontale $y = k$.

Inéquations $x^2 < k$ et $x^2 > k$ pour $k > 0$

$$x^2 < k \iff x \in \left]-\sqrt{k}\,;\sqrt{k}\right[\qquad x^2 > k \iff x \in \left]-\infty\,;-\sqrt{k}\right[\cup \left]\sqrt{k}\,;+\infty\right[$$



mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$x^2 < 4 \iff x \in]-2\,;2[$: la partie verte de la parabole est sous la droite $y = 4$.

Résolutions

- $x^2 = 7 \iff x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$.
- $x^2 = -3$ n'a aucune solution.
- $x^2 \leq 9 \iff x \in [-3\,;3]$.
- $x^2 > 2 \iff x \in]-\infty\,;-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}\,;+\infty[$.
- $(x-1)^2 = 16 \iff x - 1 = -4$ ou $x - 1 = 4 \iff x = -3$ ou $x = 5$.

Oublier la solution négative

« $x^2 = 25$ donc $x = 5$ » est incomplet : $(-5)^2 = 25$ aussi. De même, $x^2 < 25$ ne donne pas $x < 5$ (le nombre -6 vérifie $-6 < 5$ mais $(-6)^2 = 36$).

2. Position relative des courbes $y = x$ et $y = x^2$ pour $x \geq 0$

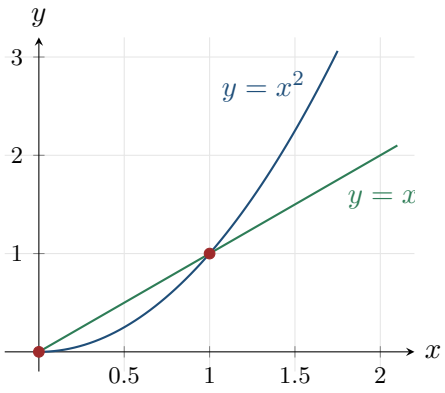
Comparer x et x^2

- Pour $0 \leq x \leq 1$: $x^2 \leq x$; la parabole est sous la droite $y = x$.
- Pour $x \geq 1$: $x^2 \geq x$; la parabole est au-dessus de la droite.
- Les deux courbes se coupent aux points $O(0\,;0)$ et $(1\,;1)$.

Démonstration. On étudie le signe de la différence $x^2 - x = x(x-1)$ pour $x \geq 0$.

- Si $0 \leq x \leq 1$: $x \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$, donc le produit est négatif ou nul : $x^2 \leq x$.
- Si $x \geq 1$: $x \geq 0$ et $x - 1 \geq 0$, donc le produit est positif ou nul : $x^2 \geq x$.

Le produit est nul pour $x = 0$ et $x = 1$: ce sont les abscisses des points communs.



Conséquence pratique

Élever au carré un nombre compris entre 0 et 1 le **diminue** : $0{,}5^2 = 0{,}25 < 0{,}5$. Élever au carré un nombre supérieur à 1 l'**augmente** : $3^2 = 9 > 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

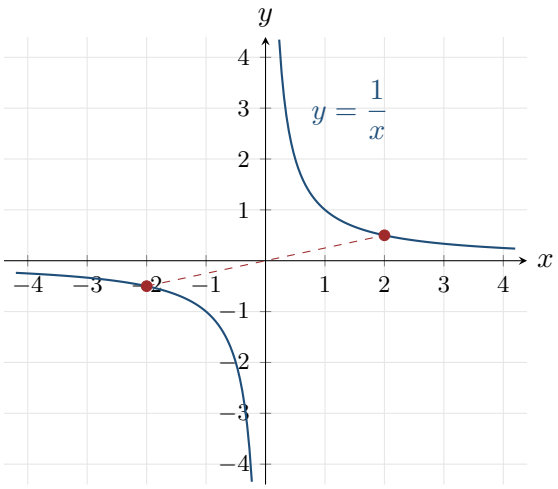
3. La fonction inverse

3.1. Définition et courbe

Fonction inverse

La fonction **inverse** est la fonction définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Le nombre 0 n'a pas d'image : on ne divise pas par 0. Sa courbe représentative s'appelle une **hyperbole** ; elle est formée de deux **branches**.

x	-4	-2	-1	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	2	4
$\dfrac{1}{x}$	$-0{,}25$	$-0{,}5$	-1	-2	2	1	$0{,}5$	$0{,}25$



L'hyperbole $y = \frac{1}{x}$: les points $(2\,;0{,}5)$ et $(-2\,;-0{,}5)$ sont symétriques par rapport à O.

Symétrie de l'hyperbole

Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$: deux nombres opposés ont des inverses opposés. Les points $\left(x\,;\frac{1}{x}\right)$ et $\left(-x\,;-\frac{1}{x}\right)$ sont symétriques par rapport à l'origine, qui est un **centre de symétrie** de l'hyperbole.

3.2. Signe et variations

Signe de l'inverse

$\dfrac{1}{x}$ a le **signe de** x : il est strictement négatif pour $x < 0$ et strictement positif pour $x > 0$. Il ne s'annule jamais : l'hyperbole ne coupe pas l'axe des abscisses.

Variations de la fonction inverse

La fonction inverse est **strictement décroissante** sur $]-\infty\,;0[$ et **strictement décroissante** sur $]0\,;+\infty[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖ ↘	

Le trait vertical sous 0 indique que 0 est une valeur interdite.

Démonstration. Soit a et b deux réels non nuls **de même signe**, avec $a < b$.

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}.$$

Le numérateur $a-b$ est strictement négatif. Comme a et b ont le même signe, $ab > 0$. Le quotient est donc strictement négatif : $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. L'ordre est inversé : la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ et sur $]-\infty\,;0[$.

Décroissante sur chaque intervalle, mais pas sur $\mathbb{R}^*$

$-1 < 1$ et $\frac{1}{-1} = -1 < 1 = \frac{1}{1}$: l'ordre est conservé ! La fonction inverse n'est **pas** décroissante sur $\mathbb{R}^*$ tout entier ; la propriété ne vaut que pour deux nombres d'un même intervalle, $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$.

3.3. Équations et inéquations avec un inverse

Équation $\frac{1}{x} = k$

Si $k \neq 0$, l'équation $\frac{1}{x} = k$ a une unique solution, $x = \frac{1}{k}$. Si $k = 0$, elle n'en a aucune.

Résoudre $\frac{1}{x} < k$ graphiquement puis algébriquement

On regarde où l'hyperbole est sous la droite $y = k$, en traitant séparément les deux branches.
Exemple : $\frac{1}{x} < 2$.

- Pour $x < 0$: $\frac{1}{x} < 0 < 2$, l'inégalité est toujours vraie.
- Pour $x > 0$: la droite $y = 2$ coupe la branche en $x = \frac{1}{2}$; comme la fonction est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{x} < 2 \iff x > \frac{1}{2}$.

Conclusion : $S =]-\infty\,;0[\cup \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Multiplier par x sans connaître son signe

Écrire « $\frac{1}{x} < 2 \iff 1 < 2x$ » suppose $x > 0$. Si $x < 0$, multiplier par x change le sens de l'inégalité. C'est pourquoi on sépare toujours les deux branches.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Comparer deux inverses

Si a et b sont **de même signe** et $a < b$, alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$. Par exemple $3 < 3{,}2$ donc $\dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{3{,}2}$; $-0{,}5 < -0{,}4$ donc $\dfrac{1}{-0{,}5} > \dfrac{1}{-0{,}4}$, c'est-à-dire $-2 > -2{,}5$.

4. Comparer les deux fonctions de référence

	Fonction carré	**Fonction inverse**
Définie sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$ $(x \neq 0)$
Courbe	parabole, sommet O	hyperbole, deux branches
Symétrie	axe des ordonnées : $(-x)^2 = x^2$	centre O : $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$
Signe	toujours ≥ 0	signe de x, jamais nul
Variations	décroissante sur $]-\infty\,;0]$, croissante sur $[0\,;+\infty[$	décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$
Extremum	minimum 0 en 0	aucun
$f(x) = k$	2, 1 ou 0 solution selon k	1 solution si $k \neq 0$

5. Méthodes et erreurs classiques

Comparer $f(a)$ et $f(b)$ pour une fonction de référence

1. Repérer l'intervalle (ou les intervalles) où se trouvent a et b.
2. S'ils sont dans un même intervalle de monotonie, appliquer la règle : ordre conservé si la fonction est croissante, inversé si elle est décroissante.
3. Sinon, utiliser une autre information : signe ($\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$ si $a < 0 < b$), symétrie, ou calcul direct.
4. Rédiger en citant la propriété utilisée.

Erreurs classiques

— $x^2 = 9 \implies x = 3$: on oublie -3.

— $x^2 < 9 \implies x < 3$: faux, la solution est $]-3\,;3[$.

— Croire que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

— Écrire $\dfrac{1}{0} = 0$ ou placer 0 dans l'ensemble de définition de l'inverse.

— Penser que le carré d'un nombre est toujours plus grand que lui ($0{,}3^2 = 0{,}09$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

6. Fiche de synthèse

Variations du carré	$0 \le a < b \implies a^2 < b^2$; $a < b \le 0 \implies a^2 > b^2$
Preuve	signe de $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$
Variations de l'inverse	$a < b$ de même signe $\implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
Preuve	signe de $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$
x **et** x^2 **pour** $x \ge 0$	$x^2 \le x$ sur $[0\,;1]$, $x^2 \ge x$ sur $[1\,;+\infty[$ (signe de $x(x-1)$)
$x^2 = k$	$k > 0$: $\pm\sqrt{k}$; $k = 0$: 0 ; $k < 0$: aucune
$x^2 < k$ $(k > 0)$	$\left]-\sqrt{k}\,;\sqrt{k}\right[$
$\frac{1}{x} = k$ $(k \neq 0)$	$x = \frac{1}{k}$
$\frac{1}{x} < k$	traiter séparément $x < 0$ et $x > 0$

7. Exercices d'application

Exercice 1 – Comparer sans calculatrice

Comparer : a) $1{,}7^2$ et $1{,}69^2$; b) $(-2{,}5)^2$ et $(-2{,}49)^2$; c) $\dfrac{1}{0{,}3}$ et $\dfrac{1}{0{,}31}$; d) $\dfrac{1}{-7}$ et $\dfrac{1}{-8}$; e) $0{,}8^2$ et $0{,}8$.

Exercice 2 – Équations et inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $x^2 = 12$; b) $x^2 + 4 = 0$; c) $x^2 \ge 16$; d) $(x+3)^2 = 9$; e) $\dfrac{1}{x} = -4$.

Exercice 3 – Encadrements

a) Sachant que $2 \le x \le 5$, encadrer x^2 puis $\dfrac{1}{x}$.
b) Sachant que $-3 \le x \le -1$, encadrer x^2.
c) Sachant que $-2 \le x \le 3$, encadrer x^2.

Exercice 4 – Inéquation avec l'inverse

Résoudre $\dfrac{1}{x} \ge -1$, en s'aidant de l'hyperbole et de la droite d'équation $y = -1$.

Exercice 5 – Aire ou périmètre ?

Un carré de côté x cm ($x > 0$) a une aire A et un périmètre P. Pour quelles valeurs de x l'aire (en cm^2) est-elle inférieure au périmètre (en cm) ? On comparera x^2 et $4x$.

8. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé.

a) $1{,}69 < 1{,}7$, deux nombres positifs ; le carré est croissant sur $[0\,;+\infty[$: $1{,}69^2 < 1{,}7^2$.

b) $-2{,}5 < -2{,}49$, deux nombres négatifs ; le carré est décroissant sur $]-\infty\,;0]$: $(-2{,}5)^2 > (-2{,}49)^2$.

c) $0{,}3 < 0{,}31$, positifs ; l'inverse est décroissant sur $]0\,;+\infty[$: $\dfrac{1}{0{,}3} > \dfrac{1}{0{,}31}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $-8 < -7$, négatifs ; l'inverse est décroissant sur $]-\infty\,;0[$: $\dfrac{1}{-8} > \dfrac{1}{-7}$.

e) $0{,}8 \in [0\,;1]$ donc $0{,}8^2 \leq 0{,}8$ (en effet $0{,}64 < 0{,}8$).

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé.

a) $12 > 0$: $x = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$ ou $x = 2\sqrt{3}$.

b) $x^2 = -4$: aucune solution.

c) $x^2 \geq 16 \iff x \leq -4$ ou $x \geq 4$: $S =]-\infty\,;-4] \cup [4\,;+\infty[$.

d) $x + 3 = -3$ ou $x + 3 = 3$, soit $x = -6$ ou $x = 0$.

e) $x = \dfrac{1}{-4} = -0{,}25$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé.

a) Sur $[2\,;5] \subset [0\,;+\infty[$, le carré est croissant : $4 \leq x^2 \leq 25$. L'inverse y est décroissant : $\dfrac{1}{5} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$ (l'ordre s'inverse).

b) Sur $[-3\,;-1] \subset]-\infty\,;0]$, le carré est décroissant : $(-1)^2 \leq x^2 \leq (-3)^2$, soit $1 \leq x^2 \leq 9$.

c) L'intervalle contient 0 : on ne peut pas appliquer une seule règle. Sur $[-2\,;0]$, $0 \leq x^2 \leq 4$; sur $[0\,;3]$, $0 \leq x^2 \leq 9$. Donc $0 \leq x^2 \leq 9$. (Écrire $4 \leq x^2 \leq 9$ serait faux : $0^2 = 0$.)

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. Pour $x > 0$: $\dfrac{1}{x} > 0 > -1$, toujours vrai. Pour $x < 0$: la droite $y = -1$ coupe la branche gauche en $x = -1$; la fonction est décroissante sur $]-\infty\,;0[$, donc $\dfrac{1}{x} \geq -1 = \dfrac{1}{-1} \iff x \leq -1$. Conclusion : $S =]-\infty\,;-1] \cup]0\,;+\infty[$. Contrôle : $x = -2$ donne $-0{,}5 \geq -1$ (vrai) ; $x = -0{,}5$ donne $-2 \geq -1$ (faux).

Corrigé de l'exercice 5

Corrigé. $A = x^2$ et $P = 4x$. $x^2 - 4x = x(x-4)$. Pour $x > 0$, le facteur x est positif ; $x - 4 < 0$ pour $x < 4$. Donc $x^2 < 4x \iff 0 < x < 4$. L'aire est inférieure au périmètre (en valeurs numériques) pour un côté compris strictement entre 0 et 4 cm ; pour $x = 4$, $A = 16$ et $P = 16$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).