# Plaquette 2 – Calculs avec radicaux et simplifications

## Fonction racine carrée — Seconde

Corrections détaillées

### Boîte à outils

**Définition.** Pour $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est l'unique nombre **positif** dont le carré vaut $a$.

$$(\sqrt{a})^2 = a \qquad \sqrt{a^2} = |a|$$

**Règles de calcul** (pour $a, b \geq 0$) :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (b > 0)$$

**Attention, ces égalités sont FAUSSES :**

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

**Contre-exemple** : $\sqrt{9+16} = 5$ alors que $3 + 4 = 7$.

**Simplifier un radical.** On extrait le plus grand **carré parfait** du radicande.

| Radical | Simplification |
|---|---|
| $\sqrt{50}$ | $\sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ |
| $\sqrt{72}$ | $\sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$ |
| $\sqrt{108}$ | $\sqrt{36 \times 3} = 6\sqrt{3}$ |

**Carrés parfaits utiles** : 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225.

**Additionner des radicaux.** On ne peut regrouper que des radicaux **semblables** (de même radicande après simplification).

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3} \qquad \text{mais} \qquad \sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ ne se simplifie pas}$$

**Rationaliser un dénominateur.**

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \qquad \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

**Valeurs à connaître** : $\sqrt{2} \approx 1{,}414 \cdot \sqrt{3} \approx 1{,}732 \cdot \sqrt{5} \approx 2{,}236 \cdot \sqrt{10} \approx 3{,}162$.

## Correction de l'exercice 1 – Simplifier des radicaux

Pour simplifier $\sqrt{n}$, on écrit $n$ comme le produit du plus grand **carré parfait** possible par un autre entier, puis on utilise $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ :

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5} \qquad \sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = 7\sqrt{2}$$

De même, $\sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = 10\sqrt{2}$ et $\sqrt{147} = \sqrt{49 \times 3} = 7\sqrt{3}$.

**Contrôle** : $3\sqrt{5} \approx 3 \times 2{,}236 = 6{,}71$ et $\sqrt{45} \approx 6{,}71$. Écrire $\sqrt{200} = 2\sqrt{50}$ n'est pas faux, mais incomplet : $\sqrt{50}$ se simplifie encore en $5\sqrt{2}$.

**Réponse.** $3\sqrt{5} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l'exercice 2 – Additionner des radicaux

On simplifie d'abord chaque racine, pour faire apparaître des racines **semblables** qu'on peut regrouper comme des termes en $x$.

$$A = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \qquad B = 3\sqrt{3} - 2 \times 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

On a utilisé $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, puis $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ et $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. Attention au coefficient : $2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$.

**Contrôle** : $4{,}243 + 7{,}071 - 2{,}828 \approx 8{,}485 \approx 6\sqrt{2}$. Deux racines non semblables ne se regroupent pas : $\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3{,}15$, alors que $\sqrt{5} \approx 2{,}24$.

**Réponse.** $A = 6\sqrt{2} \approx 8{,}485$ et $B = 4\sqrt{3} \approx 6{,}928$.

## Correction de l'exercice 3 – Produits de radicaux

Le produit de deux racines est la racine du produit : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ pour $a, b \geq 0$.

$$A = \sqrt{6 \times 24} = \sqrt{144} = 12 \qquad C = \sqrt{3 \times 12 \times 2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

Pour $B$, on élève au carré le coefficient **et** la racine : $\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 = 4 \times 5 = 20$. Oublier d'élever le 2 au carré donnerait 10.

**Contrôle** de $C$ autrement : $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$, puis $6 \times \sqrt{2}$. Un produit de racines donne un entier quand le produit des nombres sous les racines est un carré parfait, comme 144 ici.

**Réponse.** $A = 12 \cdot B = 20 \cdot C = 6\sqrt{2}$.

## Correction de l'exercice 4 – Développer avec des radicaux

On applique les identités remarquables, en traitant $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ comme des nombres ordinaires, avec $(\sqrt{a})^2 = a$.

$$A = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2 \times \sqrt{3} \times 2 + 2^2 = 3 + 4\sqrt{3} + 4 = 7 + 4\sqrt{3}$$

Pour $B$, l'identité $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ fait disparaître les racines :
$B = \left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 5 - 2 = 3$.

**Contrôle** : $(1{,}732 + 2)^2 \approx 13{,}93$ et $7 + 4 \times 1{,}732 \approx 13{,}93$. Oublier le double produit $4\sqrt{3}$ donnerait 7, très loin.

**Réponse.** $A = 7 + 4\sqrt{3}$ et $B = 3$.

## Correction de l'exercice 5 – Rationaliser un dénominateur

Pour $A$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{3}$, ce qui ne change pas le quotient, et l'on utilise $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ : $A = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Pour $B$, on multiplie par l'expression **conjuguée** $\sqrt{7} + \sqrt{3}$, pour que l'identité $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ supprime les racines du dénominateur :

$$B = \frac{4\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)} = \frac{4\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)}{7 - 3} = \sqrt{7} + \sqrt{3}$$

**Contrôle** : $\dfrac{4}{2{,}646 - 1{,}732} = \dfrac{4}{0{,}914} \approx 4{,}38$ et $\sqrt{7} + \sqrt{3} \approx 4{,}38$.

**Réponse.** $A = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ et $B = \sqrt{7} + \sqrt{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l’exercice 6 – Comparer des expressions

Les nombres à comparer sont positifs, et pour des nombres positifs, l’ordre est le même que celui de leurs carrés (la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$).

$$\left(\sqrt{10}\right)^2 = 10 > 9 = 3^2 \qquad \text{donc} \qquad \sqrt{10} > 3$$

De même, $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4\times 3 = 12$ et $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 9\times 2 = 18$ : comme $12 < 18$, on a $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

**Contrôle** : $3{,}464 < 4{,}243$. Cette méthode ne vaut que pour des nombres positifs : $-3 < -2$, mais $9 > 4$.

**Réponse.** $\sqrt{10} > 3$ (car $10 > 9$) et $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$ (car $12 < 18$).

## Correction de l’exercice 7 – Domaine de définition

Une racine carrée n’est définie que pour un nombre **positif ou nul** : on résout donc « expression sous la racine $\geq 0$ ».

— $f$ : $2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$, donc $D_f = [3\,;+\infty[$.

— $g$ : $5 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$, donc $D_g = ]-\infty\,;5]$.

— $h$ : $x^2 \geq 0$ pour tout réel, donc $D_h = \mathbb{R}$.

Pour $h$, attention : $\sqrt{x^2}$ n’est pas toujours égal à $x$, mais à la valeur absolue,

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Par exemple $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$. **Contrôle** : $f(3) = 0$ et $g(1) = 2$, alors que $f(2)$ n’existe pas.

**Réponse.** $D_f = [3\,;+\infty[$ · $D_g = ]-\infty\,;5]$ · $D_h = \mathbb{R}$ (avec $h(x) = |x|$).

## Correction de l’exercice 8 – Équation avec racine

Pour la première équation, le second membre 4 est positif : on peut élever au carré.

$$\sqrt{x+3} = 4 \Leftrightarrow x + 3 = 16 \Leftrightarrow x = 13$$

**Vérification** : $\sqrt{13+3} = \sqrt{16} = 4$. Donc $S = \{13\}$.

Pour la seconde, une racine carrée est toujours positive ou nulle : elle ne peut pas valoir $-3$, et $S = \varnothing$. Élever au carré sans réfléchir donnerait $2x - 1 = 9$, soit $x = 5$, une solution **parasite** : $\sqrt{9} = 3 \neq -3$. Devant $\sqrt{A} = k$, on regarde d’abord le signe de $k$.

**Réponse.** $S = \{13\}$ pour la première ; $S = \varnothing$ pour la seconde.

## Correction de l’exercice 9 – Encadrer une racine

On encadre le nombre 30 entre deux carrés connus, puis on utilise la croissance de la fonction racine carrée, qui conserve l’ordre. Comme $25 < 30 < 36$,

$$\sqrt{25} < \sqrt{30} < \sqrt{36} \qquad \text{soit} \qquad 5 < \sqrt{30} < 6$$

Au dixième, on teste les carrés des décimaux entre 5 et 6 : $5{,}4^2 = 29{,}16$ et $5{,}5^2 = 30{,}25$. Comme $29{,}16 < 30 < 30{,}25$, on obtient $5{,}4 < \sqrt{30} < 5{,}5$.

**Contrôle** : la calculatrice donne $\sqrt{30} \approx 5{,}477$. On pourrait continuer au centième : $5{,}47^2 = 29{,}92$ et $5{,}48^2 = 30{,}03$.

**Réponse.** $5 < \sqrt{30} < 6$, puis $5{,}4 < \sqrt{30} < 5{,}5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l’exercice 10 – Diagonale d’un carré

La diagonale partage le carré en deux triangles rectangles isocèles. Le théorème de Pythagore donne

$$d = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49 \text{ cm}$$

Plus généralement, $d = \sqrt{2c^2} = c\sqrt{2}$. Pour un carré de diagonale 10 cm, on résout $c\sqrt{2} = 10$ :

$$c = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07 \text{ cm}$$

**Vérification** : $5\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 5 \times 2 = 10$. Le rapport diagonale sur côté vaut toujours $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ : c’est aussi le rapport des côtés d’une feuille A4, $\frac{29{,}7}{21} \approx 1{,}414$.

**Réponse.** Diagonale $6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ cm ; côté $5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ cm.

## Correction de l’exercice 11 – Expression avec fractions et radicaux

Le quotient de deux racines est la racine du quotient : $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ pour $a \geq 0$ et $b > 0$.

$$A = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$$

Pour $B$, on calcule chaque racine séparément : $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ et $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, d’où $B = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

La racine ne se distribue pas sur une somme : $\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{13}{16}} \approx 0{,}90$, ce n’est pas $B$.

**Contrôle** de $A$ : $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ et $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$.

**Réponse.** $A = 4$ et $B = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

## Correction de l’exercice 12 – Inéquation avec racine

$\sqrt{x}$ n’existe que pour $x \geq 0$. Sur $[0\,;+\infty[$, les deux membres sont positifs et la fonction carré est croissante : élever au carré conserve le sens de l’inégalité.

$$\sqrt{x} \leq 5 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 25 \qquad \sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9$$

Donc $S_1 = [0\,;25]$ et $S_2 = ]9\,;+\infty[$.

**Contrôles** : $\sqrt{25} = 5$ est permis dans la première ; $\sqrt{9} = 3$ n’est pas strictement supérieur à 3. Oublier le domaine dans la première donnerait $]-\infty\,;25]$, qui contient des nombres négatifs dont la racine n’existe pas.

**Réponse.** $S = [0\,;25]$ et $S = ]9\,;+\infty[$.

## Correction de l’exercice 13 – Calcul d’une longueur

Le théorème de Pythagore donne le carré de l’hypoténuse :

$$h = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} \approx 8{,}60 \text{ cm}$$

$74 = 2 \times 37$ ne contient aucun carré parfait autre que 1 : $\sqrt{74}$ ne se simplifie pas.

**Encadrement** : $8{,}6^2 = 73{,}96$ et $8{,}7^2 = 75{,}69$, donc $8{,}6 < \sqrt{74} < 8{,}7$. **Contrôle de vraisemblance** : l’hypoténuse est plus longue que chaque côté de l’angle droit, et plus

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

courte que leur somme. Avec des côtés de 6 et 8 cm, on aurait obtenu $\sqrt{100} = 10$ cm, un entier.

**Réponse.** $\sqrt{74} \approx 8{,}60$ cm — irréductible car $74 = 2 \times 37$.

## Correction de l'exercice 14 – Expression conjuguée

On multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée $\sqrt{5} - 2$ ; l'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ supprime la racine du dénominateur :

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}-2}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)} = \frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = \sqrt{5}-2$$

Le produit demandé vaut $\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right) = 5-4 = 1$ : les deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre, ce qui est une autre façon de lire le résultat précédent.

**Contrôle** : $\sqrt{5} - 2 \approx 0{,}236$ et $\frac{1}{4{,}236} \approx 0{,}236$.

**Réponse.** La rationalisation donne $\sqrt{5} - 2$, et le produit vaut 1 : les deux nombres sont inverses.

## Correction de l'exercice 15 – Carré d'une somme de radicaux

On développe avec $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, et $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ :

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$$

Si l'on connaît une valeur approchée de $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$, par exemple $(1{,}4142 + 1{,}7321)^2 \approx 9{,}899$, on en déduit $2\sqrt{6} \approx 9{,}899 - 5 = 4{,}899$, donc $\sqrt{6} \approx 2{,}4495$.

**Contrôle** : $2{,}4495^2 \approx 6{,}000$. Oublier le double produit donnerait $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = 5$, ce qui reviendrait à croire $\sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{5}$.

**Réponse.** $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{6} \approx 9{,}899$, d'où $\sqrt{6} \approx 2{,}4495$.

## Correction de l'exercice 16 – Résolution d'une équation du second degré simple

Une équation $x^2 = a$ avec $a > 0$ a **deux** solutions opposées, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

— $x^2 = 7$ : $x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$ (environ $\pm 2{,}65$).
— $x^2 = 0{,}25$ : $x = 0{,}5$ ou $x = -0{,}5$.
— $3x^2 = 48 \Leftrightarrow x^2 = 16$ : $x = 4$ ou $x = -4$.

$$x^2 = a \ (a > 0) \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

Ne donner que la solution positive est l'erreur classique. Pour $a = 0$, il n'y a qu'une solution ; pour $a < 0$, aucune. Remarque : $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5 > 0{,}25$ ; pour un nombre entre 0 et 1, la racine est plus grande que le nombre.

**Réponse.** $\left\{\pm\sqrt{7}\right\} \cdot \{\pm 0{,}5\} \cdot \{\pm 4\}$.

## Correction de l'exercice 17 – Synthèse : calculs et géométrie

a) On utilise la formule de distance, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ :

$$AB = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \qquad AC = \sqrt{1+25} = \sqrt{26} \qquad BC = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$\sqrt{26}$ ne se simplifie pas, car $26 = 2 \times 13$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Le plus grand côté est $[AC]$. On compare son carré à la somme des carrés des deux autres : $AC^2 = 26$ et $AB^2 + BC^2 = 20 + 18 = 38$. Comme $26 \neq 38$, la réciproque du théorème de Pythagore ne s'applique pas : le triangle n'est pas rectangle (s'il l'était, l'angle droit serait opposé au plus grand côté). Les trois longueurs (4,47 ; 5,10 ; 4,24) sont différentes : il n'est pas isocèle.

c) $P = 2\sqrt{5} + \sqrt{26} + 3\sqrt{2} \approx 4{,}472 + 5{,}099 + 4{,}243 \approx 13{,}81$. Les racines ne se regroupent pas, car elles ne sont pas semblables.

**Réponse.** a) $2\sqrt{5}$, $\sqrt{26}$, $3\sqrt{2}$ · b) ni rectangle ni isocèle · c) $P \approx 13{,}81$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).