

## Plaquette 2 - Calculs avec radicaux et simplifications

### Fonction racine carrée — Seconde

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

**Définition.** Pour  $a \geq 0$ ,  $\sqrt{a}$  est l'unique nombre **positif** dont le carré vaut  $a$ .

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

**Règles de calcul** (pour  $a, b \geq 0$ ) :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (b > 0)$$

**Attention, ces égalités sont FAUSSES :**

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

**Contre-exemple :**  $\sqrt{9+16} = 5$  alors que  $3+4 = 7$ .

**Simplifier un radical.** On extrait le plus grand **carré parfait** du radicande.

| Radical      | Simplification                   |
|--------------|----------------------------------|
| $\sqrt{50}$  | $\sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ |
| $\sqrt{72}$  | $\sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$ |
| $\sqrt{108}$ | $\sqrt{36 \times 3} = 6\sqrt{3}$ |

**Carrés parfaits utiles :** 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225.

**Additionner des radicaux.** On ne peut regrouper que des radicaux **semblables** (de même radicande après simplification).

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3} \quad \text{mais} \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ ne se simplifie pas}$$

**Rationaliser un dénominateur.**

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

**Valeurs à connaître :**  $\sqrt{2} \approx 1,414 \cdot \sqrt{3} \approx 1,732 \cdot \sqrt{5} \approx 2,236 \cdot \sqrt{10} \approx 3,162$ .

#### Correction de l'exercice 1 - Simplifier des radicaux

—  $\sqrt{45} : 45 = 9 \times 5$ , donc

$$\sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6,7082$$

—  $\sqrt{98} : 98 = 49 \times 2$ , donc  $\sqrt{98} = 7\sqrt{2} \approx 9,8995 \checkmark$

—  $\sqrt{200} : 200 = 100 \times 2$ , donc  $\sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14,1421 \checkmark$

—  $\sqrt{147} : 147 = 49 \times 3$ , donc  $\sqrt{147} = 7\sqrt{3} \approx 12,1244 \checkmark$

— **Contrôles :**  $3\sqrt{5} = 3 \times 2,2361 = 6,7082 \checkmark$  ;  $7\sqrt{2} = 7 \times 1,4142 = 9,8995 \checkmark$

— **Méthode :** chercher le plus **grand** carré parfait diviseur  $\checkmark$

— **Décomposition alternative de 45 :**  $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5}$ , et non  $\sqrt{5 \times 9}$  — le résultat est le même, mais on doit extraire le **carré**  $\checkmark$

- **Erreur classique** :  $\sqrt{200} = \sqrt{4 \times 50} = 2\sqrt{50}$  — c'est **correct** mais **incomplet**, car  $\sqrt{50}$  se simplifie encore ✓
- **Vérification** :  $2\sqrt{50} = 2 \times 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$  ✓
- **Astuce** : décomposer en facteurs premiers révèle tous les carrés. Ainsi  $200 = 2^3 \times 5^2$ , d'où  $\sqrt{200} = 2 \times 5 \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$  ✓

**Réponse.**  $3\sqrt{5} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{3}$ .

### Correction de l'exercice 2 - Additionner des radicaux

- **Simplifications pour A** :  $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .  

$$A = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \approx 8,4853$$
- **Vérification décimale** :  $4,2426 + 7,0711 - 2,8284 = 8,4853$  ✓
- **Simplifications pour B** :  $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ .  

$$B = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \approx 6,9282$$
- **Vérification décimale** :  $5,1962 - 6,9282 + 8,6603 = 6,9282$  ✓
- **Attention au coefficient** :  $2\sqrt{12} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ , et non  $2\sqrt{3}$  ✓
- **Détection de l'erreur** : on obtiendrait  $6\sqrt{3} \approx 10,39$ , très différent de 6,93 ✓
- **Condition de regroupement** : les radicaux doivent être **semblables** après simplification ✓
- **Contre-exemple** :  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3,146$  ne se simplifie pas, et n'est **pas**  $\sqrt{5} \approx 2,236$  ✓
- **Méthode** : toujours **simplifier d'abord**, regrouper ensuite ✓

**Réponse.**  $A = 6\sqrt{2} \approx 8,485$  et  $B = 4\sqrt{3} \approx 6,928$ .

### Correction de l'exercice 3 - Produits de radicaux

- **Pour A** :  $\sqrt{6} \times \sqrt{24} = \sqrt{144} = 12$  ✓
- **Vérification** :  $2,4495 \times 4,8990 = 12,0000$  ✓
- **Pour B** :  $(2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$  ✓
- **Vérification** :  $(4,4721)^2 = 20,0000$  ✓
- **Pour C** :  $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$ , puis  $6\sqrt{2} \approx 8,4853$  ✓
- **Vérification** :  $1,7321 \times 3,4641 \times 1,4142 = 8,4853$  ✓
- **Méthode alternative pour C** :  $\sqrt{3 \times 12 \times 2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$  ✓
- **Erreur classique sur B** : écrire  $2 \times 5 = 10$  en oubliant d'élever le 2 au carré ✓
- **Règle** :  $(ka)^2 = k^2a^2$ , donc le coefficient est **aussi** au carré ✓
- **Astuce** : le produit de deux radicaux donne souvent un **entier** quand le produit des radicandes est un carré parfait ✓
- **Exemple** :  $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$  ✓ et  $\sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$  ✓

**Réponse.**  $A = 12 \cdot B = 20 \cdot C = 6\sqrt{2}$ .

### Correction de l'exercice 4 - Développer avec des radicaux

- **Pour A** — identité  $(a + b)^2$  avec  $a = \sqrt{3}$  et  $b = 2$  :  

$$A = 3 + 2 \times 2\sqrt{3} + 4 = 7 + 4\sqrt{3} \approx 13,9282$$
- **Vérification** :  $(1,7321 + 2)^2 = 3,7321^2 = 13,9282$  ✓
- **Pour B** — identité  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$  :  

$$B = 5 - 2 = 3$$

- **Vérification** :  $(2,2361 - 1,4142)(2,2361 + 1,4142) = 0,8219 \times 3,6503 = 3,0000 \checkmark$
- **Élégance de B** : l'identité **élimine** tous les radicaux  $\checkmark$
- **Erreur classique sur A** : écrire  $3 + 4 = 7$  en oubliant le double produit  $4\sqrt{3} \checkmark$
- **Détection** : le test numérique donnerait 7 au lieu de 13,93  $\checkmark$
- **Calcul du double produit** :  $2 \times \sqrt{3} \times 2 = 4\sqrt{3} \checkmark$
- **Contrôle** :  $4 \times 1,7321 = 6,9282$ , et  $7 + 6,9282 = 13,9282 \checkmark$
- **Généralisation de B** :  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$  — c'est la base de la **rationalisation**  $\checkmark$

**Réponse.**  $A = 7 + 4\sqrt{3}$  et  $B = 3$ .

### Correction de l'exercice 5 - Rationaliser un dénominateur

- **Pour A** : on multiplie haut et bas par  $\sqrt{3}$ .

$$A = \frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2,8868$$

- **Vérification** :  $\frac{5}{1,7321} = 2,8868 \checkmark$

- **Pour B** : on multiplie par l'expression **conjuguée**  $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ .

$$B = \frac{4(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{4} = \sqrt{7} + \sqrt{3}$$

- **Valeur** :  $2,6458 + 1,7321 = 4,3779 \checkmark$
- **Vérification** :  $\frac{4}{2,6458 - 1,7321} = \frac{4}{0,9137} = 4,3779 \checkmark$
- **Simplification remarquable** : le dénominateur  $7 - 3 = 4$  s'annule avec le numérateur  $\checkmark$
- **Intérêt de la rationalisation** : un dénominateur entier facilite les calculs numériques et les comparaisons  $\checkmark$
- **Attention au signe** : le conjugué de  $\sqrt{7} - \sqrt{3}$  est  $\sqrt{7} + \sqrt{3}$  — on change le signe **entre** les termes  $\checkmark$
- **Contrôle** :  $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = 7 - 3 = 4 \checkmark$
- **Autre exemple** :  $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,2679 \checkmark$

**Réponse.**  $A = \frac{5\sqrt{3}}{3}$  et  $B = \sqrt{7} + \sqrt{3}$ .

### Correction de l'exercice 6 - Comparer des expressions

- **Premier couple** : on compare les **carrés**, puisque les deux nombres sont positifs.
- $(\sqrt{10})^2 = 10$  et  $3^2 = 9$ .
- **Conclusion** :  $10 > 9$ , donc

$$\sqrt{10} > 3$$

- **Vérification** :  $\sqrt{10} \approx 3,1623 > 3 \checkmark$
- **Second couple** :  $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$  et  $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$ .
- **Conclusion** :  $12 < 18$ , donc

$$2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$$

- **Vérification** :  $3,4641 < 4,2426$  ✓
- **Justification de la méthode** : la fonction carré est **croissante** sur les positifs, donc comparer les carrés équivaut à comparer les nombres ✓
- **Attention** : cette méthode **ne marche pas** pour des nombres négatifs —  $-3 < -2$  mais  $9 > 4$  ✓
- **Autre comparaison** :  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  contre  $\sqrt{10}$  — les carrés valent  $5 + 2\sqrt{6} \approx 9,899$  et  $10$ , donc  $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$  ✓
- **Vérification** :  $3,1463 < 3,1623$  ✓ — de très peu !
- **Leçon** : pour comparer des radicaux, on élève au carré plutôt que de calculer des décimales ✓

**Réponse.**  $\sqrt{10} > 3$  (car  $10 > 9$ ) et  $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$  (car  $12 < 18$ ).

### Correction de l'exercice 7 - Domaine de définition

- **Pour**  $f$  : il faut  $2x - 6 \geq 0$ , soit  $x \geq 3$ .

$$D_f = [3; +\infty[$$

- **Contrôles** :  $f(3) = 0$  ✓ ;  $f(5) = \sqrt{4} = 2$  ✓ ;  $f(2)$  **n'existe pas** ✓
- **Pour**  $g$  : il faut  $5 - x \geq 0$ , soit  $x \leq 5$ .

$$D_g = ]-\infty; 5]$$

- **Contrôles** :  $g(5) = 0$  ✓ ;  $g(1) = 2$  ✓ ;  $g(6)$  n'existe pas ✓
- **Pour**  $h$  :  $x^2 \geq 0$  **toujours**, donc

$$D_h = \mathbb{R}$$

- **Simplification de**  $h : \sqrt{x^2} = |x|$ , et **non**  $x$  ✓
- **Contrôles** :  $h(-3) = \sqrt{9} = 3 = |-3|$  ✓ ;  $h(3) = 3$  ✓
- **Erreur classique** : écrire  $\sqrt{x^2} = x$ , ce qui serait **faux** pour  $x < 0$  ✓
- **Attention au sens de l'inégalité pour**  $g$  : le coefficient de  $x$  étant **négatif**, le domaine est une demi-droite **gauche** ✓
- **Cas d'un domaine vide** :  $\sqrt{-x^2 - 1}$  n'existe **nulle part**, car  $-x^2 - 1 \leq -1 < 0$  ✓

**Réponse.**  $D_f = [3; +\infty[ \cdot D_g = ]-\infty; 5] \cdot D_h = \mathbb{R}$  (avec  $h(x) = |x|$ ).

### Correction de l'exercice 8 - Équation avec racine

- **Première équation** : on élève au carré (licite, les deux membres étant positifs).

$$x + 3 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = 13$$

- **Vérification** :  $\sqrt{16} = 4$  ✓
- **Condition d'existence** :  $13 + 3 = 16 \geq 0$  ✓

$$S = \{13\}$$

- **Seconde équation** : une racine carrée est **toujours positive ou nulle**.
- **Conclusion** : elle ne peut jamais valoir  $-3$ , donc

$$S = \emptyset$$

- **Réflexe** : devant  $\sqrt{A} = k$ , vérifier d'abord le **signe de**  $k$  ✓
- **Piège de l'élévation au carré** : elle donnerait  $2x - 1 = 9$ , soit  $x = 5$  — une solution **parasite** ✓
- **Vérification de cette solution parasite** :  $\sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$  ✓

- **Leçon** : élever au carré peut **créer** des solutions ; il faut **toujours** vérifier dans l'équation d'origine ✓
  - **Cas**  $k = 0$  :  $\sqrt{x+3} = 0$  donne  $x = -3$ , solution unique ✓
  - **Résumé** :  $k < 0 \rightarrow$  aucune solution ;  $k \geq 0 \rightarrow$  une solution, à vérifier ✓
- Réponse.**  $S = \{13\}$  pour la première ;  $S = \emptyset$  pour la seconde.

### Correction de l'exercice 9 - Encadrer une racine

- **Entiers encadrants** :  $5^2 = 25$  et  $6^2 = 36$ , donc  

$$5 < \sqrt{30} < 6$$
- **Au dixième** : on teste  $5,4^2 = 29,16$  et  $5,5^2 = 30,25$ .
- **Encadrement** :  $29,16 < 30 < 30,25$ , donc  

$$5,4 < \sqrt{30} < 5,5$$
- **Valeur exacte** :  $\sqrt{30} \approx 5,4772$  ✓
- **Au centième** :  $5,47^2 = 29,9209$  et  $5,48^2 = 30,0304$ , donc  $5,47 < \sqrt{30} < 5,48$  ✓
- **Méthode** : on encadre le **radicande** entre deux carrés ✓
- **Justification** : la fonction racine carrée est **croissante**, donc elle conserve les inégalités ✓
- **Contrôle** :  $5,4772^2 = 29,9997 \approx 30$  ✓
- **Astuce mentale** :  $\sqrt{30}$  est proche de  $\sqrt{30,25} = 5,5$ , donc légèrement en dessous ✓
- **Autre repère** :  $\sqrt{30} = \sqrt{25 \times 1,2} = 5\sqrt{1,2} \approx 5 \times 1,0954 = 5,477$  ✓
- **Encadrement de  $\sqrt{200}$**  : entre 14 (196) et 15 (225), et plus précisément  

$$14,1 < \sqrt{200} < 14,2$$
 ✓

**Réponse.**  $5 < \sqrt{30} < 6$ , puis  $5,4 < \sqrt{30} < 5,5$ .

### Correction de l'exercice 10 - Diagonale d'un carré

- **Diagonale** — Pythagore dans un demi-carré :  

$$d = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \approx 8,4853 \text{ cm}$$
- **Formule générale** :  $d = c\sqrt{2}$  ✓
- **Contrôle** :  $6 \times 1,4142 = 8,4853$  ✓
- **Côté à partir de la diagonale** :  $c\sqrt{2} = 10$ , donc  

$$c = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \approx 7,0711 \text{ cm}$$
- **Vérification** :  $5\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 5 \times 2 = 10 \text{ cm}$  ✓
- **Aire du second carré** :  $(5\sqrt{2})^2 = 50 \text{ cm}^2$  ✓
- **Contrôle par la diagonale** : l'aire d'un carré vaut  $\frac{d^2}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ cm}^2$  ✓
- **Rapport diagonale/côté** :  $\sqrt{2} \approx 1,414$ , quel que soit le carré ✓
- **Application au format A4** : ses dimensions  $21 \times 29,7 \text{ cm}$  sont dans le rapport  

$$\frac{29,7}{21} \approx 1,414$$
 — c'est précisément  $\sqrt{2}$  ✓
- **Raison de ce format** : plier une feuille A4 en deux donne une A5 de **même proportion**, ce que seul le rapport  $\sqrt{2}$  permet ✓
- **Vérification** :  $\frac{21}{14,85} \approx 1,414$  ✓

**Réponse.** Diagonale  $6\sqrt{2} \approx 8,49$  cm ; côté  $5\sqrt{2} \approx 7,07$  cm.

### Correction de l'exercice 11 - Expression avec fractions et radicaux

— **Pour A** : on regroupe sous une seule racine.

$$A = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$$

— **Méthode alternative** :  $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ , donc  $A = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$  ✓

— **Vérification** :  $\frac{6,9282}{1,7321} = 4,0000$  ✓

— **Pour B** :

$$B = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4} = 1,25$$

— **Vérification** :  $0,75 + 0,5 = 1,25$  ✓

— **Détail** :  $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$  ✓ et  $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$  ✓

— **Erreur classique sur B** : écrire  $\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{13}{16}} \approx 0,9014$  — mais la racine ne se distribue **pas** sur la somme ✓

— **Contrôle** :  $0,9014 \neq 1,25$  ✓

— **Règle** : la racine se comporte bien avec le **quotient**, jamais avec la somme ✓

— **Astuce pour A** : reconnaître que  $\frac{48}{3} = 16$  évite toute simplification de radical ✓

**Réponse.**  $A = 4$  et  $B = \frac{5}{4} = 1,25$ .

### Correction de l'exercice 12 - Inéquation avec racine

— **Domaine** : il faut  $x \geq 0$  dans les deux cas ✓

— **Première inéquation** : on élève au carré (fonction croissante sur les positifs).

$$x \leq 25$$

— **Avec le domaine** :

$$S = [0; 25]$$

— **Contrôles** :  $\sqrt{25} = 5$  ✓ ;  $\sqrt{0} = 0 \leq 5$  ✓ ;  $\sqrt{26} \approx 5,099 > 5$  ✓

— **Seconde inéquation** :  $x > 9$ , donc

$$S = ]9; +\infty[$$

— **Contrôles** :  $\sqrt{16} = 4 > 3$  ✓ ;  $\sqrt{9} = 3$ , donc **exclu** ✓ ;  $\sqrt{4} = 2 < 3$  ✓

— **Erreur classique** : oublier la condition  $x \geq 0$  dans la première — écrire  $] - \infty; 25]$  serait **faux** ✓

— **Détection** :  $\sqrt{-4}$  n'existe pas ✓

— **Justification de l'élévation au carré** : la fonction carré est croissante sur  $[0; +\infty[$ , donc elle **conserve** le sens des inégalités entre positifs ✓

— **Attention** : cette propriété échoue pour des négatifs —  $-5 < -3$  mais  $25 > 9$  ✓

— **Inéquation impossible** :  $\sqrt{x} < -1$  n'a **aucune** solution ✓

— **Inéquation toujours vraie** :  $\sqrt{x} \geq 0$  est vérifiée sur tout le domaine, soit  $[0; +\infty[$  ✓

**Réponse.**  $S = [0; 25]$  et  $S = ]9; +\infty[$ .

## Correction de l'exercice 13 - Calcul d'une longueur

— **Pythagore** :

$$h = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} \approx 8,6023 \text{ cm}$$

— **Simplification** :  $74 = 2 \times 37$ , et ni 2 ni 37 n'est un carré — le radical est **irréductible** ✓

— **Encadrement** :  $8^2 = 64$  et  $9^2 = 81$ , donc  $8 < \sqrt{74} < 9$  ✓

— **Au dixième** :  $8,6^2 = 73,96$  et  $8,7^2 = 75,69$ , donc  $8,6 < \sqrt{74} < 8,7$  ✓

— **Vérification** :  $8,6023^2 = 74,0000$  ✓

— **Périmètre** :  $5 + 7 + 8,6023 \approx 20,60 \text{ cm}$  ✓

— **Aire** :  $\frac{5 \times 7}{2} = 17,5 \text{ cm}^2$  ✓

— **Contrôle de l'inégalité triangulaire** :  $8,6 < 5 + 7 = 12$  ✓

— **Comparaison** : l'hypoténuse est bien **supérieure** à chaque cathète ✓

— **Cas où la simplification marche** : avec des cathètes de 6 et 8 cm, on obtient  $\sqrt{100} = 10 \text{ cm}$  — un triplet pythagoricien ✓

— **Autre cas** : cathètes 2 et 4 donnent  $\sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,472 \text{ cm}$  ✓

**Réponse.**  $\sqrt{74} \approx 8,60 \text{ cm}$  — irréductible car  $74 = 2 \times 37$ .

## Correction de l'exercice 14 - Expression conjuguée

— **Rationalisation** : on multiplie par le conjugué  $\sqrt{5} - 2$ .

$$\frac{1}{\sqrt{5} + 2} = \frac{\sqrt{5} - 2}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} = \frac{\sqrt{5} - 2}{5 - 4} = \sqrt{5} - 2$$

— **Valeur** :  $2,2361 - 2 = 0,2361$  ✓

— **Vérification** :  $\frac{1}{2,2361 + 2} = \frac{1}{4,2361} = 0,2361$  ✓

— **Produit demandé** :

$$(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = 5 - 4 = 1$$

— **Interprétation remarquable** : ces deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre ✓

— **Contrôle** :  $0,2361 \times 4,2361 = 1,0000$  ✓

— **Lien avec le nombre d'or** :  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$  possède une propriété analogue, son inverse valant  $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618$  ✓

— **Vérification** :  $1,618 \times 0,618 = 1,0000$  ✓

— **Cas général** :  $\sqrt{a} + b$  et  $\sqrt{a} - b$  sont inverses si et seulement si  $a - b^2 = 1$  ✓

— **Autre exemple** :  $\sqrt{10} + 3$  et  $\sqrt{10} - 3$ , car  $10 - 9 = 1$  ✓

— **Contrôle** :  $6,1623 \times 0,1623 = 1,0000$  ✓

**Réponse.** La rationalisation donne  $\sqrt{5} - 2$ , et le produit vaut 1 : les deux nombres sont inverses.

## Correction de l'exercice 15 - Carré d'une somme de radicaux

— **Développement** :

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$$

- **Valeur** :  $5 + 2 \times 2,4495 = 9,8990$  ✓
- **Vérification** :  $(1,4142 + 1,7321)^2 = 3,1463^2 = 9,8990$  ✓
- **Déduction de  $\sqrt{6}$**  : si l'on connaît  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \approx 9,899$ , alors

$$\sqrt{6} = \frac{9,899 - 5}{2} = \frac{4,899}{2} = 2,4495$$

- **Contrôle** :  $2,4495^2 = 5,9999 \approx 6$  ✓
- **Autre lecture** :  $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ , ce qui explique l'apparition du terme  $2\sqrt{6}$  ✓
- **Contrôle** :  $1,4142 \times 1,7321 = 2,4495$  ✓
- **Erreur classique** : écrire  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 3 = 5$  en oubliant le double produit ✓
- **Détection** :  $5 \neq 9,899$  — l'écart est le double produit  $2\sqrt{6} \approx 4,899$  ✓
- **Conséquence** :  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \approx 3,1463$ , et **non**  $\sqrt{5} \approx 2,236$  ✓
- **Comparaison avec  $\pi$**  :  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3,1463$  est une approximation grossière de  $\pi \approx 3,1416$ , à 0,15 % près ✓

**Réponse.**  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} \approx 9,899$ , d'où  $\sqrt{6} \approx 2,4495$ .

### Correction de l'exercice 16 - Résolution d'une équation du second degré simple

- **Première** :  $x = \pm\sqrt{7}$ , soit environ  $\pm 2,6458$ .  

$$S = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$$
- **Deuxième** :  $x = \pm 0,5$ , car  $0,5^2 = 0,25$  ✓  

$$S = \{-0,5; 0,5\}$$
- **Troisième** :  $x^2 = 16$ , donc  $x = \pm 4$ .  

$$S = \{-4; 4\}$$
- **Vérifications** :  $7 = 7$  ✓ ;  $0,25 = 0,25$  ✓ ;  $3 \times 16 = 48$  ✓
- **Erreur classique** : ne donner que la solution **positive** ✓
- **Règle** :  $x^2 = a$  avec  $a > 0$  a **toujours deux** solutions opposées ✓
- **Cas  $a = 0$**  : une seule solution,  $x = 0$  ✓
- **Cas  $a < 0$**  : **aucune** solution réelle ✓
- **Remarque sur la deuxième** :  $\sqrt{0,25} = 0,5$ , donc la racine d'un nombre **inférieur à 1** est **plus grande** que lui ✓
- **Contrôle** :  $0,5 > 0,25$  ✓
- **Comportement général** :  $\sqrt{x} > x$  pour  $0 < x < 1$ , et  $\sqrt{x} < x$  pour  $x > 1$  ✓
- **Point fixe** :  $\sqrt{x} = x$  seulement pour  $x = 0$  et  $x = 1$  ✓

**Réponse.**  $\{\pm\sqrt{7}\} \cdot \{\pm 0,5\} \cdot \{\pm 4\}$ .

### Correction de l'exercice 17 - Synthèse : calculs et géométrie

a) **Longueurs** par la formule de distance.

$$AB = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,4721$$

$$AC = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26} \approx 5,0990$$

$$BC = \sqrt{(1 - 4)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,2426$$

— **Simplifications** :  $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$  ✓ et  $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$  ✓ ;  $\sqrt{26} = \sqrt{2 \times 13}$  est **irréductible** ✓

b) **Triangle rectangle ?** On teste Pythagore avec le plus grand côté AC.

—  $AC^2 = 26$  et  $AB^2 + BC^2 = 20 + 18 = 38$ .

— **Conclusion** :  $26 \neq 38$ , donc le triangle **n'est pas rectangle** en B ✓

— **Autres sommets** :  $AB^2 = 20$  contre  $AC^2 + BC^2 = 44$  ✗ ;  $BC^2 = 18$  contre  $AB^2 + AC^2 = 46$  ✗

— **Conclusion** : le triangle n'est **pas rectangle** ✓

— **Isocèle ?** Les trois longueurs  $2\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{26}$  et  $3\sqrt{2}$  sont **distinctes** (4,47 ; 5,10 ; 4,24), donc le triangle est **quelconque** ✓

c) **Périmètre** :

$$P = 2\sqrt{5} + \sqrt{26} + 3\sqrt{2} \approx 4,4721 + 5,0990 + 4,2426 = 13,8137$$

— **Réponse** :  $P \approx 13,81$  ✓

— **Contrôle de l'inégalité triangulaire** :  $5,0990 < 4,4721 + 4,2426 = 8,7147$  ✓

— **Aire par le déterminant** :  $\frac{1}{2}|4 \times 5 - 2 \times 1| = \frac{18}{2} = 9$  ✓

— **Contrôle de cohérence** : un triangle de périmètre 13,81 et d'aire 9 est plausible — pour comparaison, le triangle équilatéral de même périmètre aurait une aire de  $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4,604^2 \approx 9,18$  ✓

— **Lecture** : notre triangle est donc presque « aussi rond » que possible pour son périmètre ✓

— **Remarque** : les radicaux ne se regroupent **pas** ici, les trois radicandes étant différents après simplification ✓

**Réponse.** a)  $2\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{26}$ ,  $3\sqrt{2}$  · b) ni rectangle ni isocèle · c)  $P \approx 13,81$ .