

Plaquette 3 – Courbe, variations et comparaisons avec x et x^2

Fonction racine carrée — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Fonction racine carrée. $f(x) = \sqrt{x}$, définie sur $[0; +\infty[$.

Variations. Elle est **strictement croissante** sur son domaine.

$$0 \leq a < b \implies \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

Tableau de valeurs.

x	0	0,25	1	4	9	16
$\sqrt{x}$	0	0,5	1	2	3	4

Allure de la courbe. Elle part de l'origine, monte très vite au début puis de plus en plus lentement — c'est la **moitié supérieure** d'une parabole couchée.

Comparaison des trois fonctions.

Position de x	Ordre
$0 < x < 1$	$x^2 < x < \sqrt{x}$
$x = 1$	les trois valent 1
$x > 1$	$\sqrt{x} < x < x^2$

Points d'intersection. Les courbes de $\sqrt{x}$, x et x^2 se coupent toutes en $(0; 0)$ et $(1; 1)$.

Symétrie. Les courbes de $\sqrt{x}$ et de x^2 (restreinte aux positifs) sont **symétriques** par rapport à la droite $y = x$ — ce sont des fonctions **réciroques**.

$$\sqrt{x^2} = x \text{ et } (\sqrt{x})^2 = x \text{ pour } x \geq 0$$

Croissance ralentie. Passer de $x = 1$ à $x = 4$ (facteur 4) ne multiplie $\sqrt{x}$ que par 2 — c'est la racine de ce facteur.

Correction de l'exercice 1 – Tableau de valeurs

- $\sqrt{0} = 0$ ✓
- $\sqrt{0,01} = 0,1$, car $0,1^2 = 0,01$ ✓
- $\sqrt{0,64} = 0,8$, car $0,8^2 = 0,64$ ✓
- $\sqrt{2,25} = 1,5$, car $1,5^2 = 2,25$ ✓
- $\sqrt{6,25} = 2,5$, car $2,5^2 = 6,25$ ✓
- $\sqrt{169} = 13$, car $13^2 = 169$ ✓
- **Astuce pour les décimaux :** $\sqrt{0,64} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{8}{10} = 0,8$ ✓
- **De même :** $\sqrt{2,25} = \sqrt{\frac{225}{100}} = \frac{15}{10} = 1,5$ ✓
- **Observation importante :** pour $x < 1$, on a $\sqrt{x} > x$ — ainsi $\sqrt{0,64} = 0,8 > 0,64$ ✓
- **Et pour $x > 1$:** $\sqrt{2,25} = 1,5 < 2,25$ ✓

- **Erreur classique** : croire que $\sqrt{0,64} = 0,08$ — le test par le carré la détecte ($0,08^2 = 0,0064$) ✓
- **Règle du décalage** : la racine « divise par deux » le nombre de chiffres décimaux, à condition qu'il soit **pair** ✓

Réponse. $0 \cdot 0,1 \cdot 0,8 \cdot 1,5 \cdot 2,5 \cdot 13$.

Correction de l'exercice 2 - Comparer sans calculatrice

- **a)** $0,5 < 1$, donc $\sqrt{0,5} > 0,5$ ✓
- **Vérification** : $\sqrt{0,5} \approx 0,7071 > 0,5$ ✓
- **b)** $3 > 1$, donc $\sqrt{3} < 3$ ✓
- **Vérification** : $1,7321 < 3$ ✓
- **c)** $\sqrt{1} = 1$ — **égalité** ✓
- **Règle générale** :

! Position	Comparaison
$0 < x < 1$	$\sqrt{x} > x$
$x = 1$	$\sqrt{x} = x$
$x > 1$	$\sqrt{x} < x$

- **Justification** : $\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$, du signe de $1 - \sqrt{x}$ ✓
- **Contrôle** : pour $x = 0,25$, $\sqrt{x} - x = 0,5 - 0,25 = 0,25 > 0$ ✓
- Pour $x = 4$, $2 - 4 = -2 < 0$ ✓
- **Point fixe** : outre $x = 1$, il y a aussi $x = 0$ ✓
- **Écart maximal sur** $]0; 1[$: atteint en $x = 0,25$, où $\sqrt{x} - x = 0,25$ ✓
- **Vérification** : en $x = 0,16$, l'écart vaut $0,4 - 0,16 = 0,24 < 0,25$ ✓

Réponse. a) $\sqrt{0,5} > 0,5$ · b) $\sqrt{3} < 3$ · c) égalité.

Correction de l'exercice 3 - Croissance de la fonction

- **Méthode** : la fonction racine carrée étant **croissante**, il suffit de ranger les radicandes ✓
- **Ordre des radicandes** : $0,9 < 3,5 < 7 < 12$.
- **Conclusion** :

$$\sqrt{0,9} < \sqrt{3,5} < \sqrt{7} < \sqrt{12}$$

- **Vérifications** : $0,9487 < 1,8708 < 2,6458 < 3,4641$ ✓
- **Gain de temps** : aucun calcul de racine n'est nécessaire ✓
- **Énoncé de la propriété** : pour $0 \leq a < b$, on a $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ✓
- **Attention** : cette méthode **n'est valable que** pour des radicandes positifs, ce qui est toujours le cas ✓
- **Piège avec des coefficients** : pour comparer $2\sqrt{5}$ et $3\sqrt{2}$, on **ne peut pas** ranger 5 et 2 — il faut comparer les carrés 20 et 18 ✓
- **Contrôle** : $4,4721 > 4,2426$ ✓
- **Autre observation** : $\sqrt{0,9} < 1$, car $0,9 < 1$ ✓
- **Écarts** : les racines sont beaucoup plus **resserrées** que les radicandes (0,95 à 3,46 contre 0,9 à 12) — c'est l'effet de la croissance ralentie ✓

Réponse. $\sqrt{0,9} < \sqrt{3,5} < \sqrt{7} < \sqrt{12}$.

Correction de l'exercice 4 - Lecture graphique

- **Équation** $f(x) = 3$: on cherche x tel que $\sqrt{x} = 3$.
 - **Élévation au carré** :

$$x = 9$$
 - **Solution unique** : la fonction étant strictement croissante, elle ne prend chaque valeur qu'**une fois** ✓
 - **Vérification** : $\sqrt{9} = 3$ ✓
 - **Inéquation** $f(x) \leq 2$: $\sqrt{x} \leq 2$ donne $x \leq 4$, avec la condition $x \geq 0$.

$$S = [0; 4]$$
 - **Vérifications** : $\sqrt{4} = 2$ ✓ ; $\sqrt{0} = 0 \leq 2$ ✓ ; $\sqrt{5} \approx 2,236 > 2$ ✓
 - **Lecture graphique** : la courbe passe sous la droite $y = 2$ pour $x \in [0; 4]$ ✓
 - **Erreur classique** : oublier la borne 0 dans l'inéquation — la fonction n'existe pas pour $x < 0$ ✓
 - **Image de la fonction** : $f([0; +\infty[) = [0; +\infty[$ — elle prend **toutes** les valeurs positives ✓
 - **Antécédent de 10** : $x = 100$ ✓
 - **Antécédent de 0,5** : $x = 0,25$ ✓
 - **Absence d'antécédent négatif** : $\sqrt{x} = -1$ n'a aucune solution ✓
- Réponse.** $f(x) = 3$ pour $x = 9$; $f(x) \leq 2$ pour $x \in [0; 4]$.

Correction de l'exercice 5 - Comparer les trois fonctions

- **Pour** $x = 0,16$ (inférieur à 1) :
 $\sqrt{0,16} = 0,4$; $x = 0,16$; $x^2 = 0,0256$.

$$x^2 < x < \sqrt{x}$$
- **Contrôle** : $0,0256 < 0,16 < 0,4$ ✓
- **Pour** $x = 25$ (supérieur à 1) :
 $\sqrt{25} = 5$; $x = 25$; $x^2 = 625$.

$$\sqrt{x} < x < x^2$$
- **Contrôle** : $5 < 25 < 625$ ✓
- **Observation** : l'ordre s'**inverse** complètement de part et d'autre de 1 ✓
- **Raison** : élever au carré **diminue** un nombre inférieur à 1 et **augmente** un nombre supérieur ✓
- **Vérification** : $0,5^2 = 0,25 < 0,5$ ✓ et $2^2 = 4 > 2$ ✓
- **Point de bascule** : $x = 1$, où les trois fonctions valent 1 ✓
- **Écarts pour** $x = 25$: la racine est 5 fois plus petite que x , et x^2 est 25 fois plus grand ✓
- **Amplitude totale** : de 5 à 625, soit un facteur 125 ✓
- **Contrôle** : $\frac{625}{5} = 125 = 25^{3/2}$ ✓

Réponse. $x = 0,16$: $0,0256 < 0,16 < 0,4$; $x = 25$: $5 < 25 < 625$.

Correction de l'exercice 6 - Résoudre graphiquement

- **Équation** $\sqrt{x} = x$: on élève au carré, soit $x = x^2$.
- **Factorisation** : $x^2 - x = x(x - 1) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 1$.

$$S = \{0; 1\}$$

- **Vérifications** : $\sqrt{0} = 0$ ✓ et $\sqrt{1} = 1$ ✓
- **Interprétation** : les deux courbes se coupent en $(0; 0)$ et $(1; 1)$ ✓
- **Inéquation** $\sqrt{x} > x$: d'après l'étude des signes, cela vaut pour $0 < x < 1$.

$$S =]0; 1[$$

- **Justification** : $\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$, produit de deux facteurs positifs sur $]0; 1[$ ✓
- **Vérifications** : $x = 0,25$ donne $0,5 > 0,25$ ✓ ; $x = 4$ donne $2 < 4$ ✓
- **Bornes exclues** : en 0 et en 1, il y a **égalité**, pas inégalité stricte ✓
- **Lecture graphique** : la courbe de $\sqrt{x}$ est **au-dessus** de la droite $y = x$ entre 0 et 1 ✓
- **Écart maximal** : atteint en $x = 0,25$, où il vaut $0,25$ ✓
- **Inéquation contraire** : $\sqrt{x} < x$ pour $x > 1$ ✓

Réponse. $\sqrt{x} = x$ pour $x \in \{0; 1\}$; $\sqrt{x} > x$ pour $x \in]0; 1[$.

Correction de l'exercice 7 - Variation et encadrement

- **Croissance** : la fonction racine **conserve** le sens des inégalités.

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{12}$$

- **Valeurs** : $1,7321 \leq \sqrt{x} \leq 3,4641$ ✓
- **Simplification** : $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, donc l'encadrement s'écrit $\sqrt{3} \leq \sqrt{x} \leq 2\sqrt{3}$ ✓
- **Pour** $2\sqrt{x} + 1$: on multiplie par $2 > 0$ puis on ajoute 1.

$$2\sqrt{3} + 1 \leq 2\sqrt{x} + 1 \leq 4\sqrt{3} + 1$$

- **Valeurs** : $4,4641 \leq 2\sqrt{x} + 1 \leq 7,9282$ ✓
- **Contrôle en** $x = 3$: $2 \times 1,7321 + 1 = 4,4641$ ✓
- **Contrôle en** $x = 12$: $2 \times 3,4641 + 1 = 7,9282$ ✓
- **Contrôle intermédiaire en** $x = 9$: $\sqrt{9} = 3$, dans $[1,73; 3,46]$ ✓ ; et 7, dans $[4,46; 7,93]$ ✓
- **Amplitude de l'encadrement de** $x : 9$; celle de $\sqrt{x} : 1,73$ — la racine **comprime** l'intervalle ✓
- **Attention avec un coefficient négatif** : pour $-2\sqrt{x}$, l'encadrement s'**inverse**, soit $-4\sqrt{3} \leq -2\sqrt{x} \leq -2\sqrt{3}$ ✓
- **Contrôle** : $-6,93 \leq -2\sqrt{x} \leq -3,46$ ✓

Réponse. $\sqrt{3} \leq \sqrt{x} \leq 2\sqrt{3}$, puis $2\sqrt{3} + 1 \leq 2\sqrt{x} + 1 \leq 4\sqrt{3} + 1$.

Correction de l'exercice 8 - Fonction réciproque

- **Première égalité, pour** $x \geq 0$: $\sqrt{x^2}$ est le nombre positif dont le carré vaut x^2 — c'est x lui-même, puisqu'il est positif ✓
- **Contrôles** : $\sqrt{9} = 3$ avec $x = 3$ ✓ ; $\sqrt{0,25} = 0,5$ avec $x = 0,5$ ✓
- **Seconde égalité** : par définition, $(\sqrt{x})^2 = x$ pour tout $x \geq 0$ ✓
- **Contrôles** : $(\sqrt{7})^2 = 7$ ✓ ; $(\sqrt{0,3})^2 = 0,3$ ✓
- **Pour** $x < 0$: la seconde égalité n'a **pas de sens**, $\sqrt{x}$ n'existant pas ✓
- **Mais la première** reste calculable, et donne

$$\sqrt{x^2} = -x = |x|$$

- **Contrôles** : $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$ ✓ ; $\sqrt{(-0,5)^2} = 0,5$ ✓

- **Formule valable partout** : $\sqrt{x^2} = |x|$ ✓
- **Interprétation** : la fonction racine carrée et la fonction carré sont **réciroques** sur $[0; +\infty[$ seulement ✓
- **Conséquence graphique** : leurs courbes sont **symétriques** par rapport à la droite $y = x$, pour les x positifs ✓
- **Vérification de la symétrie** : $(4; 2)$ est sur la courbe de $\sqrt{x}$, et $(2; 4)$ sur celle de x^2 ✓
- **Erreur classique** : simplifier $\sqrt{x^2}$ en x sans condition — faux dès que x est négatif ✓

Réponse. Les deux égalités valent pour $x \geq 0$; pour $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$, donc $\sqrt{x^2} = |x|$ en général.

Correction de l'exercice 9 - Croissance ralentie

- **Valeurs** : $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{400} = 20$; $\sqrt{1600} = 40$ ✓
- **Observation** : le radicande est **multiplié par 4** à chaque étape, tandis que la racine ne double ✓
- **Règle** :

$$\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$$

- **Généralisation** : $\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$ ✓
- **Contrôles** : $\sqrt{900} = 30$ et $\sqrt{9 \times 100} = 3 \times 10$ ✓
- **Pour multiplier la racine par 10** : il faut multiplier le radicande par 100 ✓
- **Vérification** : $\sqrt{10\,000} = 100$ ✓
- **Croissance ralentie** : passer de $x = 100$ à $x = 10\,000$ (facteur 100) ne multiplie la racine que par 10 ✓
- **Application physique** : la période d'un pendule est proportionnelle à $\sqrt{L}$ — quadrupler la longueur ne **double** que la période ✓
- **Application à la vitesse de chute** : elle est proportionnelle à $\sqrt{h}$, donc tomber de 4 fois plus haut ne double que la vitesse d'impact ✓
- **Contre-intuitif** : c'est pourquoi une chute de 20 m n'est « que » deux fois plus rapide qu'une chute de 5 m ✓
- **Contrôle** : $\sqrt{20} / \sqrt{5} = \sqrt{4} = 2$ ✓

Réponse. 10, 20, 40 : multiplier le radicande par 4 ne fait que **doubler** la racine.

Correction de l'exercice 10 - Antécédents

- **Antécédent de 0** : $\sqrt{x} = 0$ donne $x = 0$ ✓
- **Antécédent de 1,5** : $x = 1,5^2 = 2,25$ ✓
- **Vérification** : $\sqrt{2,25} = 1,5$ ✓
- **Antécédent de 7** : $x = 49$ ✓
- **Antécédent de -2** : **aucun**, car une racine carrée n'est jamais négative ✓
- **Règle** : tout réel **positif** y admet exactement **un** antécédent, y^2 ✓
- **Justification** : la fonction est **strictement croissante** de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$ ✓
- **Conséquence** : elle réalise une **bijection** de $[0; +\infty[$ sur lui-même ✓
- **Contrôle** : l'antécédent de 0,1 est 0,01 ✓ ; celui de 100 est 10 000 ✓
- **Observation** : les antécédents croissent **beaucoup** plus vite que les images ✓
- **Contrôle** : pour passer d'une image de 1 à 10, l'antécédent passe de 1 à 100 ✓
- **Formulation en termes de courbe** : la droite horizontale $y = k$ coupe la courbe une fois pour $k \geq 0$, jamais pour $k < 0$ ✓

Réponse. $0 \cdot 2,25 \cdot 49$: aucun antécédent pour -2 .

Correction de l'exercice 11 - Comparer des expressions avec racines

— **Méthode** : on compare les **carrés** (les deux expressions étant positives).

— **Premier carré** : $x + 1$.

— **Second carré** : $(\sqrt{x} + 1)^2 = x + 2\sqrt{x} + 1$.

— **Différence** : $(x + 2\sqrt{x} + 1) - (x + 1) = 2\sqrt{x} \geq 0 \checkmark$

— **Conclusion** :

$$\sqrt{x+1} \leq \sqrt{x} + 1$$

— **Cas d'égalité** : $2\sqrt{x} = 0$, soit $x = 0 \checkmark$

— **Contrôles** : $x = 0$ donne $1 = 1 \checkmark$; $x = 3$ donne $2 < 1,7321 + 1 = 2,7321 \checkmark$; $x = 100$ donne $10,0499 < 11 \checkmark$

— **Interprétation** : c'est un cas de l'inégalité générale $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \checkmark$

— **Contrôle de l'inégalité générale** : $\sqrt{9+16} = 5$ contre $3 + 4 = 7 \checkmark$

— **Écart** : il vaut $2\sqrt{ab}$ au niveau des carrés $\checkmark$

— **Écart pour de grandes valeurs** : $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ tend vers 0, alors que $\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} = 1$ reste constant $\checkmark$

— **Contrôle** : $\sqrt{101} - \sqrt{100} \approx 0,0499 \checkmark$

— **Leçon** : la racine « écrase » les sommes — ne jamais la distribuer $\checkmark$

Réponse. $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{x} + 1$, avec égalité seulement pour $x = 0$.

Correction de l'exercice 12 - Modèle de freinage

— **Pour** $d = 25$:

$$v = 12\sqrt{25} = 12 \times 5 = 60 \text{ km/h}$$

— **Pour** $v = 90$: $12\sqrt{d} = 90$, donc $\sqrt{d} = 7,5$ et

$$d = 7,5^2 = 56,25 \text{ m}$$

— **Vérification** : $12 \times \sqrt{56,25} = 12 \times 7,5 = 90 \checkmark$

— **Observation** : la vitesse passe de 60 à 90 km/h ($\times 1,5$), mais la distance de 25 à 56,25 m ($\times 2,25$) $\checkmark$

— **Règle** : la distance varie comme le **carré** de la vitesse $\checkmark$

— **Contrôle** : $1,5^2 = 2,25 \checkmark$

— **Pour** $v = 120 \text{ km/h}$: $\sqrt{d} = 10$, donc $d = 100 \text{ m} \checkmark$

— **Comparaison** : doubler la vitesse (de 60 à 120) **quadruple** la distance (de 25 à 100 m) $\checkmark$

— **Message de sécurité routière** : c'est précisément pourquoi les excès de vitesse sont si dangereux $\checkmark$

— **Pour** $v = 30 \text{ km/h}$: $d = 6,25 \text{ m} \checkmark$

— **Contrôle** : $\frac{100}{6,25} = 16 = 4^2$, pour un rapport de vitesses de 4 $\checkmark$

— **Formule inverse** : $d = \frac{v^2}{144} \checkmark$

— **Contrôle** : $\frac{8100}{144} = 56,25 \checkmark$

Réponse. $v = 60 \text{ km/h}$ pour $d = 25 \text{ m}$; $d = 56,25 \text{ m}$ pour $v = 90 \text{ km/h}$.

Correction de l'exercice 13 - Inéquation et domaine

- **Domaine** : il faut $x - 2 \geq 0$, soit $x \geq 2$ ✓
 - **Élévation au carré** (licite, les deux membres étant positifs) :

$$x - 2 \leq 9 \quad \Rightarrow \quad x \leq 11$$
 - **Intersection avec le domaine** :

$$S = [2; 11]$$
 - **Vérifications** : $x = 2$ donne $\sqrt{0} = 0 \leq 3$ ✓ ; $x = 11$ donne $\sqrt{9} = 3$ ✓ ; $x = 12$ donne $\sqrt{10} \approx 3,162 > 3$ ✓ ; $x = 1$ **n'est pas** dans le domaine ✓
 - **Erreur classique** : oublier le domaine et écrire $] - \infty ; 11]$ ✓
 - **Détection** : $\sqrt{-1}$ n'existe pas ✓
 - **Inéquation contraire** : $\sqrt{x - 2} > 3$ donne $x > 11$, soit $]11 ; +\infty[$ ✓
 - **Contrôle** : l'union des deux solutions redonne bien le domaine $[2 ; +\infty[$ ✓
 - **Cas d'un second membre négatif** : $\sqrt{x - 2} \leq -1$ n'a **aucune** solution ✓
 - **Cas d'un second membre nul** : $\sqrt{x - 2} \leq 0$ n'a qu'une solution, $x = 2$ ✓
 - **Méthode générale** : domaine **d'abord**, résolution **ensuite**, intersection **enfin** ✓
- Réponse.** $S = [2; 11]$.

Correction de l'exercice 14 - Aire et côté d'un carré

- **Côté** : $c = \sqrt{75}$.
- **Simplification** : $75 = 25 \times 3$, donc

$$c = 5\sqrt{3} \approx 8,6603 \text{ cm}$$
- **Arrondi** : 8,66 cm ✓
- **Vérification** : $8,6603^2 = 75,0008 \approx 75$ ✓
- **Périmètre** : $4c = 20\sqrt{3} \approx 34,6410 \text{ cm}$, soit 34,64 cm ✓
- **Contrôle** : $4 \times 8,66 = 34,64$ ✓
- **Diagonale** : $c\sqrt{2} = 5\sqrt{6} \approx 12,2474 \text{ cm}$ ✓
- **Contrôle** : $8,6603 \times 1,4142 = 12,2474$ ✓
- **Encadrement du côté** : $8^2 = 64$ et $9^2 = 81$, donc $8 < c < 9$ ✓
- **Précision** : $8,66^2 = 74,9956$ et $8,67^2 = 75,1689$, ce qui confirme l'arrondi ✓
- **Intérêt de la valeur exacte** : $5\sqrt{3}$ permet de poursuivre les calculs **sans erreur d'arrondi** ✓
- **Exemple** : l'aire recalculée depuis 8,66 donnerait 74,9956 cm², soit une perte de précision ✓
- **Comparaison** : un carré d'aire 100 cm² aurait un côté de 10 cm — le nôtre est donc légèrement plus petit ✓

Réponse. Côté $5\sqrt{3} \approx 8,66 \text{ cm}$; périmètre $20\sqrt{3} \approx 34,64 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 15 - Comparer avec un coefficient

- **Premier couple** : on compare les carrés.
- $(3\sqrt{7})^2 = 9 \times 7 = 63$ et $(7\sqrt{3})^2 = 49 \times 3 = 147$.
- **Conclusion** : $63 < 147$, donc

$$3\sqrt{7} < 7\sqrt{3}$$

- **Vérification** : $7,9373 < 12,1244$ ✓
- **Second couple** : $(5\sqrt{2})^2 = 25 \times 2 = 50$ et $(2\sqrt{13})^2 = 4 \times 13 = 52$.
- **Conclusion** : $50 < 52$, donc

$$5\sqrt{2} < 2\sqrt{13}$$

- **Vérification** : $7,0711 < 7,2111$ ✓ — de peu !
- **Intérêt de la méthode** : les deux nombres du second couple diffèrent de moins de 2 %, ce qui rendrait une comparaison décimale imprécise sans plusieurs décimales ✓
- **Écart relatif** : $\frac{7,2111 - 7,0711}{7,0711} \approx 1,98\%$ ✓
- **Méthode systématique** : $a\sqrt{b}$ se compare par a^2b ✓
- **Contrôle** : $9 \times 7 = 63$ et $49 \times 3 = 147$ ✓
- **Astuce** : quand on compare $a\sqrt{b}$ et $b\sqrt{a}$, le plus grand est celui dont le **coefficient** est le plus grand — ici $7 > 3$, donc $7\sqrt{3}$ gagne ✓
- **Justification** : a^2b contre b^2a , soit $ab(a - b)$ — du signe de $a - b$ ✓

Réponse. $3\sqrt{7} < 7\sqrt{3}$ (car $63 < 147$) et $5\sqrt{2} < 2\sqrt{13}$ (car $50 < 52$).

Correction de l'exercice 16 - Tableau de variations

- **Variations** : la fonction est **strictement croissante** sur tout son domaine ✓
- **Tableau** :

x	0	16
$f(x)$	0	4

- **Minimum** : $f(0) = 0$, atteint à la borne **gauche** ✓
- **Maximum** : $f(16) = 4$, atteint à la borne **droite** ✓
- **Image de l'intervalle** : $f([0; 16]) = [0; 4]$ ✓
- **Conséquence** : pour tout $x \in [0; 16]$, on a $0 \leq \sqrt{x} \leq 4$ ✓
- **Contrôles** : $f(4) = 2$ ✓ ; $f(9) = 3$ ✓ ; $f(1) = 1$ ✓
- **Absence d'extremum intérieur** : une fonction **monotone** atteint ses extremums aux **bornes** ✓
- **Nombre de solutions de $f(x) = k$** : exactement **une** pour $k \in [0; 4]$, **aucune** sinon ✓
- **Contrôle** : $f(x) = 2,5$ donne $x = 6,25 \in [0; 16]$ ✓ ; $f(x) = 5$ donnerait $x = 25$, **hors** de l'intervalle ✓
- **Répartition des valeurs** : la moitié de l'image $([0; 2])$ correspond au **quart** du domaine $([0; 4])$ ✓
- **Lecture** : c'est la traduction de la croissance **ralentie** ✓

Réponse. Strictement croissante ; minimum 0 en $x = 0$ et maximum 4 en $x = 16$.

Correction de l'exercice 17 - Synthèse : étude complète

- a) **Domaine** : il faut $x + 4 \geq 0$, soit

$$D_f = [-4; +\infty[$$

- b) **Variations.** La fonction $x \mapsto x + 4$ est croissante, et la racine aussi — donc f est **strictement croissante** ✓

x	-4	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$

— **Valeurs** : $f(-4) = 0 \checkmark$; $f(0) = 2 \checkmark$; $f(5) = 3 \checkmark$; $f(12) = 4 \checkmark$

c) **Équation** $f(x) = 5$: $x + 4 = 25$, donc

$$x = 21$$

— **Vérification** : $\sqrt{25} = 5 \checkmark$ et $21 \in D_f \checkmark$

— **Inéquation** $f(x) < 3$: $x + 4 < 9$, soit $x < 5$.

— **Intersection avec le domaine** :

$$S = [-4; 5[$$

— **Vérifications** : $f(-4) = 0 < 3 \checkmark$; $f(5) = 3$, donc **exclu** $\checkmark$; $f(6) = \sqrt{10} \approx 3,162 > 3 \checkmark$

d) **Comparaison**. Les deux expressions sont positives ; on compare leurs carrés.

— $f(x)^2 = x + 4$.

— $(\sqrt{x} + 2)^2 = x + 4\sqrt{x} + 4$.

— **Différence** : $4\sqrt{x} \geq 0 \checkmark$

— **Conclusion** :

$$\sqrt{x+4} \leq \sqrt{x} + 2$$

— **Cas d'égalité** : $x = 0$, où les deux valent 2 $\checkmark$

— **Contrôles** : $x = 5$ donne $3 < 2,2361 + 2 = 4,2361 \checkmark$; $x = 100$ donne $\sqrt{104} \approx 10,198 < 12 \checkmark$

— **Interprétation** : c'est encore l'inégalité $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, avec $b = 4 \checkmark$

— **Comportement à l'infini** : l'écart $\sqrt{x} + 2 - \sqrt{x+4}$ tend vers 2 $\checkmark$

— **Contrôle** : pour $x = 10\,000$, $102 - \sqrt{10\,004} \approx 102 - 100,02 = 1,98 \checkmark$

— **Lecture graphique** : la courbe de f est la courbe de $\sqrt{x}$ **translatée de 4 vers la gauche**, alors que $\sqrt{x} + 2$ est translatée de 2 vers le haut $\checkmark$

Réponse. a) $[-4; +\infty[$ · b) strictement croissante depuis 0 · c) $x = 21$ puis $[-4; 5[$ · d) $\sqrt{x+4} \leq \sqrt{x} + 2$, égalité en 0.