Plaquette 3 – Courbe, variations et comparaisons avec x et x²

Fonction racine carrée — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Fonction racine carrée. $f(x) = \sqrt{x}$, définie sur $[0\,;+\infty[$.

Variations. Elle est **strictement croissante** sur son domaine.

$$0 \leq a < b \implies \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

Tableau de valeurs.

! x	0	0,25	1	4	9	16
$\sqrt{x}$	0	0,5	1	2	3	4

Allure de la courbe. Elle part de l'origine, monte très vite au début puis de plus en plus lentement — c'est la **moitié supérieure** d'une parabole couchée.

Comparaison des trois fonctions.

Position de x	**Ordre**
$0 < x < 1$	$x^2 < x < \sqrt{x}$
$x = 1$	les trois valent 1
$x > 1$	$\sqrt{x} < x < x^2$

Points d'intersection. Les courbes de $\sqrt{x}$, x et x^2 se coupent toutes en $(0\,;0)$ et $(1\,;1)$.

Symétrie. Les courbes de $\sqrt{x}$ et de x^2 (restreinte aux positifs) sont **symétriques** par rapport à la droite $y = x$ — ce sont des fonctions **réciproques**.

$$\sqrt{x^2} = x \text{ et } (\sqrt{x})^2 = x \quad \text{pour } x \geq 0$$

Croissance ralentie. Passer de $x = 1$ à $x = 4$ (facteur 4) ne multiplie $\sqrt{x}$ que par 2 — c'est la racine de ce facteur.

Correction de l'exercice 1 – Tableau de valeurs

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif dont le carré vaut a. On vérifie chaque résultat en l'élevant au carré.

$$\sqrt{0{,}64} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{8}{10} = 0{,}8 \qquad \sqrt{2{,}25} = \sqrt{\frac{225}{100}} = \frac{15}{10} = 1{,}5$$

De même, $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$, $\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ et $\sqrt{169} = 13$, puisque $0{,}1^2 = 0{,}01$, $2{,}5^2 = 6{,}25$ et $13^2 = 169$.

Croire que $\sqrt{0{,}64} = 0{,}08$ est une erreur fréquente : $0{,}08^2 = 0{,}006\,4$. On remarque que $\sqrt{0{,}64} = 0{,}8 > 0{,}64$, alors que $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5 < 2{,}25$.

Réponse. $0 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 13$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Comparer sans calculatrice

On compare $\sqrt{x}$ et x en étudiant le signe de leur différence, qu'on factorise par $\sqrt{x}$ (en utilisant $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$) :

$$\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$$

Pour $x > 0$, ce signe est celui de $1 - \sqrt{x}$: positif si $x < 1$, nul si $x = 1$, négatif si $x > 1$.

a) $0{,}5 < 1$, donc $\sqrt{0{,}5} > 0{,}5$ (en effet $\sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71$).
b) $3 > 1$, donc $\sqrt{3} < 3$.
c) $\sqrt{1} = 1$: égalité.

Les nombres égaux à leur racine carrée sont 0 et 1.

Réponse. a) $\sqrt{0{,}5} > 0{,}5$ · b) $\sqrt{3} < 3$ · c) égalité.

Correction de l'exercice 3 – Croissance de la fonction

La fonction racine carrée est **croissante** sur $[0\,;+\infty[$: elle range les nombres dans le même ordre que les nombres sous la racine. Il suffit donc de ranger $0{,}9 < 3{,}5 < 7 < 12$:

$$\sqrt{0{,}9} < \sqrt{3{,}5} < \sqrt{7} < \sqrt{12}$$

Aucun calcul de racine n'est nécessaire. **Contrôle** : $0{,}95 < 1{,}87 < 2{,}65 < 3{,}46$.

Cette méthode ne s'applique pas directement à des nombres comme $2\sqrt{5}$ et $3\sqrt{2}$, qui ont des coefficients : on compare alors leurs carrés, 20 et 18.

Réponse. $\sqrt{0{,}9} < \sqrt{3{,}5} < \sqrt{7} < \sqrt{12}$.

Correction de l'exercice 4 – Lecture graphique

Sur la courbe de f, les solutions de $f(x) = 3$ sont les abscisses des points d'ordonnée 3. On les trouve aussi par le calcul : $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$, car 3 est positif. La fonction étant strictement croissante, cette solution est unique.

Les solutions de $f(x) \leq 2$ sont les abscisses des points de la courbe situés sous la droite d'équation $y = 2$: la courbe la coupe en $x = 4$ et reste en dessous avant.

$$\sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$$

Donc $S = [0\,;4]$. La borne 0 vient du domaine : la fonction n'est pas définie pour $x < 0$.
Contrôle : $\sqrt{5} \approx 2{,}24 > 2$.

Réponse. $f(x) = 3$ pour $x = 9$; $f(x) \leq 2$ pour $x \in [0\,;4]$.

Correction de l'exercice 5 – Comparer les trois fonctions

On calcule les trois nombres pour chaque valeur de x.

— Pour $x = 0{,}16$: $\sqrt{x} = 0{,}4$ et $x^2 = 0{,}025\,6$, donc $x^2 < x < \sqrt{x}$.
— Pour $x = 25$: $\sqrt{x} = 5$ et $x^2 = 625$, donc $\sqrt{x} < x < x^2$.

$$0 < x < 1 : x^2 < x < \sqrt{x} \qquad x > 1 : \sqrt{x} < x < x^2$$

L'ordre s'inverse de part et d'autre de 1, où les trois nombres sont égaux. Explication : multiplier un nombre positif par un nombre inférieur à 1 le diminue ; ainsi $x^2 = x \times x < x$ quand $0 < x < 1$.

Réponse. $x = 0{,}16$: $0{,}0256 < 0{,}16 < 0{,}4$ · $x = 25$: $5 < 25 < 625$.

Correction de l'exercice 6 – Résoudre graphiquement

Les deux membres sont positifs pour $x \geq 0$: on peut élever au carré.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$$

Donc $x = 0$ ou $x = 1$: les courbes de $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x$ se coupent en $(0\,;0)$ et $(1\,;1)$.

Pour l'inéquation, on étudie le signe de $\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$: sur $]0\,;1[$, les deux facteurs sont strictement positifs. Donc $\sqrt{x} > x$ sur $]0\,;1[$; en 0 et 1 il y a égalité, et pour $x > 1$, $\sqrt{x} < x$. Graphiquement, la courbe de la racine est au-dessus de la droite $y = x$ entre 0 et 1. **Contrôle** : $x = 0{,}25$ donne $0{,}5 > 0{,}25$.

Réponse. $\sqrt{x} = x$ pour $x \in \{0\,;1\}$; $\sqrt{x} > x$ pour $x \in]0\,;1[$.

Correction de l'exercice 7 – Variation et encadrement

La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$: elle conserve l'ordre. De $3 \leq x \leq 12$, on déduit

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

On multiplie ensuite par 2, nombre positif, ce qui conserve le sens, puis on ajoute 1 :

$$2\sqrt{3} + 1 \leq 2\sqrt{x} + 1 \leq 4\sqrt{3} + 1$$

soit environ $4{,}46 \leq 2\sqrt{x} + 1 \leq 7{,}93$. **Contrôle** avec $x = 9$: $2 \times 3 + 1 = 7$, bien dans l'encadrement. Avec $-2\sqrt{x}$, le sens se serait inversé.

Réponse. $\sqrt{3} \leq \sqrt{x} \leq 2\sqrt{3}$, puis $2\sqrt{3} + 1 \leq 2\sqrt{x} + 1 \leq 4\sqrt{3} + 1$.

Correction de l'exercice 8 – Fonction réciproque

Pour $x \geq 0$, $\sqrt{x^2}$ est par définition le nombre **positif** dont le carré vaut x^2 : c'est x lui-même. De même, $(\sqrt{x})^2 = x$ par définition de la racine carrée.

Pour $x < 0$, $\sqrt{x}$ n'existe pas, donc $(\sqrt{x})^2$ non plus. En revanche x^2 est positif et $\sqrt{x^2}$ existe : c'est le nombre positif $-x$, dont le carré est aussi x^2.

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \text{pour tout réel } x$$

Contrôle : $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$. Simplifier $\sqrt{x^2}$ en x sans condition est une erreur dès que x est négatif.

Réponse. Les deux égalités valent pour $x \geq 0$; pour $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$, donc $\sqrt{x^2} = |x|$ en général.

Correction de l'exercice 9 – Croissance ralentie

On reconnaît des carrés : $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{400} = 20$ et $\sqrt{1\,600} = 40$. Le nombre sous la racine est multiplié par 4 à chaque étape, la racine seulement par 2 :

$$\sqrt{4a} = \sqrt{4} \times \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$$

Plus généralement, $\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$ pour $k \geq 0$: pour multiplier une racine par 10, il faut multiplier le nombre sous la racine par 100.

C'est une croissance **ralentie**. Elle a des conséquences concrètes : la vitesse d'un objet en chute libre est proportionnelle à $\sqrt{h}$, donc tomber de 4 fois plus haut ne double « que » la vitesse d'arrivée.

Réponse. 10, 20, 40 : multiplier le radicande par 4 ne fait que **doubler** la racine.

Correction de l'exercice 10 – Antécédents

Un antécédent de y est un nombre $x \geq 0$ tel que $\sqrt{x} = y$. Pour $y \geq 0$, on élève au carré :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$x = y^2$.

$$\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad \sqrt{x} = 1{,}5 \Leftrightarrow x = 2{,}25 \qquad \sqrt{x} = 7 \Leftrightarrow x = 49$$

En revanche, -2 n'a **aucun** antécédent : une racine carrée n'est jamais négative.

Tout nombre positif y a exactement un antécédent, y^2, car la fonction est strictement croissante. Graphiquement, la droite $y = k$ coupe la courbe une fois si $k \geq 0$, jamais si $k < 0$. **Contrôle** : $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$.

Réponse. 0 · $2{,}25$ · 49 · aucun antécédent pour -2.

Correction de l'exercice 11 – Comparer des expressions avec racines

Les deux expressions sont positives : on peut comparer leurs carrés.

$$(\sqrt{x}+1)^2 - \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (x + 2\sqrt{x} + 1) - (x+1) = 2\sqrt{x} \geq 0$$

Donc $(\sqrt{x}+1)^2 \geq \left(\sqrt{x+1}\right)^2$, et comme ces nombres sont positifs, $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{x} + 1$. L'égalité n'a lieu que si $2\sqrt{x} = 0$, c'est-à-dire $x = 0$.

Contrôle : $x = 3$ donne $2 < 2{,}73$. C'est un cas de la propriété $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$: la racine ne se distribue jamais sur une somme.

Réponse. $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{x} + 1$, avec égalité seulement pour $x = 0$.

Correction de l'exercice 12 – Modèle de freinage

On remplace d par 25 : $v = 12\sqrt{25} = 12 \times 5 = 60$ km/h.

Pour $v = 90$, on isole la racine, puis on élève au carré (le nombre $7{,}5$ est positif) :

$$12\sqrt{d} = 90 \Leftrightarrow \sqrt{d} = 7{,}5 \Leftrightarrow d = 7{,}5^2 = 56{,}25 \text{ m}$$

Vérification : $12 \times \sqrt{56{,}25} = 12 \times 7{,}5 = 90$.

La vitesse est multipliée par $1{,}5$, la distance par $1{,}5^2 = 2{,}25$: la distance de freinage varie comme le **carré** de la vitesse. Doubler la vitesse, de 60 à 120 km/h, quadruple la distance, de 25 à 100 m.

Réponse. $v = 60$ km/h pour $d = 25$ m ; $d = 56{,}25$ m pour $v = 90$ km/h.

Correction de l'exercice 13 – Inéquation et domaine

On détermine d'abord le domaine : $x - 2 \geq 0$, soit $x \geq 2$. Sur ce domaine, les deux membres sont positifs et l'on peut élever au carré sans changer le sens :

$$\sqrt{x-2} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x - 2 \leq 9 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 11$$

Donc $S = [2\,;11]$.

Vérification : $x = 11$ donne $\sqrt{9} = 3$, la borne est incluse ; $x = 12$ donne $\sqrt{10} > 3$. Oublier le domaine conduirait à $]-\infty\,;11]$, qui contient $x = 1$, pour lequel $\sqrt{-1}$ n'existe pas. Méthode : domaine d'abord, résolution ensuite.

Réponse. $S = [2\,;11]$.

Correction de l'exercice 14 – Aire et côté d'un carré

Le côté c d'un carré d'aire 75 cm² vérifie $c^2 = 75$ avec $c > 0$, donc $c = \sqrt{75}$. On simplifie :

$$c = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66 \text{ cm}$$

Le périmètre vaut $4c = 20\sqrt{3} \approx 34{,}64$ cm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle de l'arrondi : $8{,}66^2 = 74{,}995\,6$ et $8{,}67^2 = 75{,}168\,9$, donc c est bien entre 8,66 et 8,67, plus près de 8,66. On garde la valeur exacte $5\sqrt{3}$ pour la suite des calculs : recalculer l'aire avec 8,66 ne redonnerait pas exactement 75.

Réponse. Côté $5\sqrt{3} \approx 8{,}66$ cm ; périmètre $20\sqrt{3} \approx 34{,}64$ cm.

Correction de l'exercice 15 – Comparer avec un coefficient

Les nombres sont positifs : on compare leurs carrés, avec $\left(a\sqrt{b}\right)^2 = a^2 b$.

$$\left(3\sqrt{7}\right)^2 = 9 \times 7 = 63 \qquad \left(7\sqrt{3}\right)^2 = 49 \times 3 = 147$$

Comme $63 < 147$, on a $3\sqrt{7} < 7\sqrt{3}$.

De même, $\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 50$ et $\left(2\sqrt{13}\right)^2 = 52$: $5\sqrt{2} < 2\sqrt{13}$. Ces deux nombres valent environ 7,07 et 7,21 ; ils diffèrent de moins de 2 %, et la comparaison des carrés évite de calculer de nombreuses décimales.

Réponse. $3\sqrt{7} < 7\sqrt{3}$ (car $63 < 147$) et $5\sqrt{2} < 2\sqrt{13}$ (car $50 < 52$).

Correction de l'exercice 16 – Tableau de variations

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc sur $[0\,;16]$:

x	0	↗	16
$f(x)$	0	↗	4

Une fonction croissante sur un intervalle atteint son minimum à la borne gauche et son maximum à la borne droite : le minimum vaut $f(0) = 0$ et le maximum $f(16) = \sqrt{16} = 4$.

$$0 \leq x \leq 16 \Longrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 4$$

Contrôle : $f(4) = 2$ et $f(9) = 3$ sont bien entre 0 et 4. La moitié des valeurs prises, de 0 à 2, est atteinte sur le premier quart de l'intervalle, de 0 à 4.

Réponse. Strictement croissante ; minimum 0 en $x = 0$ et maximum 4 en $x = 16$.

Correction de l'exercice 17 – Synthèse : étude complète

a) $\sqrt{x+4}$ existe si et seulement si $x + 4 \geq 0$, soit $x \geq -4$: $D_f = [-4\,;+\infty[$.

b) Si $-4 \leq a < b$, alors $0 \leq a + 4 < b + 4$, et comme la fonction racine est croissante, $\sqrt{a+4} < \sqrt{b+4}$: f est strictement croissante sur D_f, de $f(-4) = 0$ vers des valeurs de plus en plus grandes.

c) $f(x) = 5 \Leftrightarrow x + 4 = 25 \Leftrightarrow x = 21$, qui est dans le domaine. Pour l'inéquation :

$$f(x) < 3 \Leftrightarrow 0 \leq x + 4 < 9 \Leftrightarrow -4 \leq x < 5$$

d) Pour $x \geq 0$, les deux expressions sont positives et l'on compare leurs carrés : $(\sqrt{x}+2)^2 - (x+4) = x + 4\sqrt{x} + 4 - x - 4 = 4\sqrt{x} \geq 0$. Donc $\sqrt{x+4} \leq \sqrt{x} + 2$, avec égalité seulement pour $x = 0$.

Réponse. a) $[-4\,;+\infty[$ · b) strictement croissante depuis 0 · c) $x = 21$ puis $[-4\,;5[$ · d) $\sqrt{x+4} \leq \sqrt{x} + 2$, égalité en 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).