

Plaquette 1 – Domaine, croissance et comparaisons

Fonction racine carrée — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour la fonction racine carrée.

- $\sqrt{x}$ n'existe que pour $x \geq 0$: une racine carrée d'un nombre négatif n'a pas de sens dans $\mathbb{R}$.
- $\sqrt{x}$ est l'**unique nombre positif** dont le carré vaut x : $(\sqrt{x})^2 = x$ pour $x \geq 0$, et $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout réel x .
- La fonction racine carrée est **croissante** sur $[0; +\infty[$:

$$0 \leq a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$
- Position par rapport à x : si $0 < x < 1$ alors $\sqrt{x} > x$; si $x > 1$ alors $\sqrt{x} < x$.
- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ et $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ pour $a \geq 0$.
- Courbe : une demi-parabole partant de l'origine, de plus en plus « plate ».

Correction de l'exercice 1 – Domaine de définition

Condition du cours : une racine carrée existe si et seulement si ce qui est **sous** le radical est positif ou nul.

- $x - 3 \geq 0$ donne $x \geq 3$: l'expression existe sur $[3; +\infty[$.
- $2x + 5 \geq 0$ donne $2x \geq -5$, soit $x \geq -\frac{5}{2}$: domaine $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right[$.
- $1 - x \geq 0$ donne $-x \geq -1$, et en divisant par -1 (l'inégalité change de sens) $x \leq 1$: domaine $] -\infty; 1]$.

Réponse. a) $x \geq 3$ · b) $x \geq -\frac{5}{2}$ · c) $x \leq 1$.

Correction de l'exercice 2 – Calculer des images

On cherche à chaque fois le nombre positif dont le carré vaut x .

- $f(0) = \sqrt{0} = 0$ car $0^2 = 0$.
- $f(9) = \sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$.
- $f(0,25) = \sqrt{0,25} = 0,5$ car $0,5^2 = 0,25$. On remarque que l'image est **plus grande** que x : c'est le cas pour tout x entre 0 et 1.
- $f(2) = \sqrt{2} \approx 1,41$ (valeur non exacte : $\sqrt{2}$ est irrationnel).

Réponse. 0 ; 3 ; 0,5 ; $\sqrt{2} \approx 1,41$.

Correction de l'exercice 3 – Chercher un antécédent

- Pour $\sqrt{x} = 5$: les deux membres sont positifs, on peut élever au carré. Comme $(\sqrt{x})^2 = x$, on obtient $x = 5^2 = 25$. Vérification : $\sqrt{25} = 5$.
- Pour $\sqrt{x} = -2$: une racine carrée est toujours **positive ou nulle**, elle ne peut pas valoir -2 . L'équation n'a aucune solution.

Piège. Élever au carré sans regarder le signe donnerait $x = 4$, qui ne convient pas : $\sqrt{4} = 2 \neq -2$. On vérifie toujours.

Réponse. $x = 25$; puis aucune solution.

Correction de l'exercice 4 - Comparer sans calculatrice

On utilise la croissance de la fonction racine carrée et sa position par rapport à x .

- $0 < 0,5 < 1$ donc $\sqrt{0,5} > 0,5$: la racine est plus grande que le nombre.
- $2 > 1$ donc $\sqrt{2} < 2$.
- Comme $0,5 < 2$ et que la fonction est croissante, $\sqrt{0,5} < \sqrt{2}$.
- En rassemblant : $0,5 < \sqrt{0,5} < \sqrt{2} < 2$.
- Contrôle numérique : $\sqrt{0,5} \approx 0,71$ et $\sqrt{2} \approx 1,41$.

Réponse. $0,5 < \sqrt{0,5} < \sqrt{2} < 2$.

Correction de l'exercice 5 - Croissance et encadrement

Propriété du cours : $0 \leq a \leq b \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

- $7 < 11$ donc $\sqrt{7} < \sqrt{11}$.
- On écrit $3 = \sqrt{9}$: comme $9 < 10$, on a $\sqrt{9} < \sqrt{10}$, donc $3 < \sqrt{10}$.
- Pour encadrer $\sqrt{30}$, on cherche les carrés parfaits qui entourent 30 : $25 < 30 < 36$, donc $\sqrt{25} < \sqrt{30} < \sqrt{36}$, c'est-à-dire

$$5 < \sqrt{30} < 6$$

Réponse. $\sqrt{7} < \sqrt{11}$; $3 < \sqrt{10}$; $5 < \sqrt{30} < 6$.

Correction de l'exercice 6 - Inéquations avec une racine

On n'oublie pas la condition d'existence : $x \geq 0$.

- $\sqrt{x} \leq 4$: les deux membres étant positifs, on élève au carré (la fonction carré est croissante sur les positifs) : $x \leq 16$. Avec la condition $x \geq 0$, l'ensemble des solutions est $[0 ; 16]$.
- $\sqrt{x} > 3$ donne $x > 9$, soit $]9 ; +\infty[$ (la condition $x \geq 0$ est automatiquement vérifiée).
- Contrôle : $x = 16$ donne $\sqrt{16} = 4$, la borne est bien atteinte ; $x = 9$ donne $\sqrt{9} = 3$, qui ne vérifie pas l'inégalité stricte.

Réponse. $[0 ; 16]$ puis $]9 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 7 - Simplifier une expression

Formules du cours : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$ et $\sqrt{A^2} = |A|$.

- $\sqrt{16x^2} = \sqrt{16} \times \sqrt{x^2} = 4|x|$, et comme $x \geq 0$ on a $|x| = x$: le résultat est $4x$.
- On reconnaît une identité remarquable sous le radical : $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$. Donc

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = |x + 1|$$

- Pour $x \geq -1$, $x + 1 \geq 0$ donc $|x + 1| = x + 1$.

Piège. Sans l'hypothèse sur x , la valeur absolue est obligatoire : pour $x = -5$, $\sqrt{(-5)^2} = 5$ et non -5 .

Réponse. $4x$ puis $x + 1$.

Correction de l'exercice 8 - Équation avec une racine

- Condition d'existence : $2x + 3 \geq 0$, soit $x \geq -1,5$.
- Les deux membres sont positifs : on élève au carré.

$$\sqrt{2x+3} = 5 \implies 2x+3 = 25$$

- Donc $2x = 22$ et $x = 11$.
- $11 \geq -1,5$: la condition est respectée. Vérification : $\sqrt{2 \times 11 + 3} = \sqrt{25} = 5$.

Réponse. $S = \{11\}$.

Correction de l'exercice 9 - Chute libre : durée de chute

On remplace h par sa valeur dans la formule, en calculant d'abord le contenu de la racine.

- Pour $h = 45$: $\frac{2 \times 45}{9,81} = \frac{90}{9,81} \approx 9,174$, donc $t = \sqrt{9,174} \approx 3,03$ s.
- Pour $h = 20$: $\frac{2 \times 20}{9,81} = \frac{40}{9,81} \approx 4,077$, donc $t = \sqrt{4,077} \approx 2,02$ s.
- La hauteur a été divisée par 2,25 mais la durée seulement par 1,5 : il n'y a **pas** proportionnalité. C'est logique, car t dépend de $\sqrt{h}$: pour multiplier la durée par 2, il faut multiplier la hauteur par 4.

Réponse. $t \approx 3,03$ s et $t \approx 2,02$ s ; pas de proportionnalité (t varie comme $\sqrt{h}$).

Correction de l'exercice 10 - Diagonale et côté d'un carré

- a) Le théorème de Pythagore dans le demi-carré rectangle donne $d^2 = 5^2 + 5^2 = 50$, donc
- $$d = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2} \approx 7,07 \text{ cm}$$
- b) L'aire d'un carré de côté c vaut c^2 , donc $c^2 = 50$ avec $c > 0$, d'où $c = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm.
- Les deux résultats coïncident : le carré d'aire 50 cm² a pour côté la diagonale du carré de côté 5 cm. Sa valeur approchée est 7,07 cm.

Réponse. a) $5\sqrt{2} \approx 7,07$ cm · b) $5\sqrt{2}$ cm.

Correction de l'exercice 11 - Vrai ou faux, avec justification

- a) **Faux.** Contre-exemple : $a = 9$ et $b = 16$ donnent $\sqrt{25} = 5$ alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. La racine carrée ne se distribue pas sur une somme (elle se distribue sur un produit).
- b) **Faux.** Il faut $x \geq 0$: $\sqrt{-4}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.
- c) **Vrai.** C'est la propriété du cours : au-delà de 1, la racine carrée est en dessous de la droite $y = x$. Par exemple $\sqrt{9} = 3 < 9$.
- d) **Vrai.** Par définition, $\sqrt{7}$ est le nombre positif dont le carré vaut 7.

Réponse. a) faux · b) faux · c) vrai · d) vrai.