# Plaquette 1 – Domaine, croissance et comparaisons

## Fonction racine carrée — Seconde

Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Formules et méthodes pour la fonction racine carrée.**

— $\sqrt{x}$ n'existe que pour $x \geq 0$ : une racine carrée d'un nombre négatif n'a pas de sens dans $\mathbb{R}$.

— $\sqrt{x}$ est l'**unique nombre positif** dont le carré vaut $x$ : $(\sqrt{x})^2 = x$ pour $x \geq 0$, et $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout réel $x$.

— La fonction racine carrée est **croissante** sur $[0\,;+\infty[$ :

$$0 \leq a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

— Position par rapport à $x$ : si $0 < x < 1$ alors $\sqrt{x} > x$ ; si $x > 1$ alors $\sqrt{x} < x$.

— $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ et $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ pour $a \geq 0$.

— Courbe : une demi-parabole partant de l'origine, de plus en plus « plate ».

### Correction de l'exercice 1 – Domaine de définition

Condition du cours : une racine carrée existe si et seulement si ce qui est **sous** le radical est positif ou nul.

a) $x - 3 \geq 0$ donne $x \geq 3$ : l'expression existe sur $[3\,;+\infty[$.

b) $2x + 5 \geq 0$ donne $2x \geq -5$, soit $x \geq -\dfrac{5}{2}$ : domaine $\left[-\dfrac{5}{2}\,;+\infty\right[$.

c) $1 - x \geq 0$ donne $-x \geq -1$, et en divisant par $-1$ (l'inégalité change de sens) $x \leq 1$ : domaine $]-\infty\,;1]$.

**Réponse.** a) $x \geq 3$ · b) $x \geq -\dfrac{5}{2}$ · c) $x \leq 1$.

### Correction de l'exercice 2 – Calculer des images

On cherche à chaque fois le nombre positif dont le carré vaut $x$.

— $f(0) = \sqrt{0} = 0$ car $0^2 = 0$.

— $f(9) = \sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$.

— $f(0{,}25) = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ car $0{,}5^2 = 0{,}25$. On remarque que l'image est **plus grande** que $x$ : c'est le cas pour tout $x$ entre 0 et 1.

— $f(2) = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ (valeur non exacte : $\sqrt{2}$ est irrationnel).

**Réponse.** 0 ; 3 ; 0,5 ; $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

### Correction de l'exercice 3 – Chercher un antécédent

— Pour $\sqrt{x} = 5$ : les deux membres sont positifs, on peut élever au carré. Comme $(\sqrt{x})^2 = x$, on obtient $x = 5^2 = 25$. Vérification : $\sqrt{25} = 5$.

— Pour $\sqrt{x} = -2$ : une racine carrée est toujours **positive ou nulle**, elle ne peut pas valoir $-2$. L'équation n'a aucune solution.

**Piège.** Élever au carré sans regarder le signe donnerait $x = 4$, qui ne convient pas : $\sqrt{4} = 2 \neq -2$. On vérifie toujours.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** $x = 25$ ; puis aucune solution.

## Correction de l'exercice 4 – Comparer sans calculatrice

On utilise la croissance de la fonction racine carrée et sa position par rapport à $x$.

— $0 < 0{,}5 < 1$ donc $\sqrt{0{,}5} > 0{,}5$ : la racine est plus grande que le nombre.
— $2 > 1$ donc $\sqrt{2} < 2$.
— Comme $0{,}5 < 2$ et que la fonction est croissante, $\sqrt{0{,}5} < \sqrt{2}$.
— En rassemblant : $0{,}5 < \sqrt{0{,}5} < \sqrt{2} < 2$.
— Contrôle numérique : $\sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71$ et $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

**Réponse.** $0{,}5 < \sqrt{0{,}5} < \sqrt{2} < 2$.

## Correction de l'exercice 5 – Croissance et encadrement

Propriété du cours : $0 \leq a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

— $7 < 11$ donc $\sqrt{7} < \sqrt{11}$.
— On écrit $3 = \sqrt{9}$ : comme $9 < 10$, on a $\sqrt{9} < \sqrt{10}$, donc $3 < \sqrt{10}$.
— Pour encadrer $\sqrt{30}$, on cherche les carrés parfaits qui entourent 30 : $25 < 30 < 36$, donc $\sqrt{25} < \sqrt{30} < \sqrt{36}$, c'est-à-dire

$$5 < \sqrt{30} < 6$$

**Réponse.** $\sqrt{7} < \sqrt{11}$ ; $3 < \sqrt{10}$ ; $5 < \sqrt{30} < 6$.

## Correction de l'exercice 6 – Inéquations avec une racine

On n'oublie pas la condition d'existence : $x \geq 0$.

— $\sqrt{x} \leq 4$ : les deux membres étant positifs, on élève au carré (la fonction carré est croissante sur les positifs) : $x \leq 16$. Avec la condition $x \geq 0$, l'ensemble des solutions est $[0\,;16]$.
— $\sqrt{x} > 3$ donne $x > 9$, soit $]9\,;+\infty[$ (la condition $x \geq 0$ est automatiquement vérifiée).
— Contrôle : $x = 16$ donne $\sqrt{16} = 4$, la borne est bien atteinte ; $x = 9$ donne $\sqrt{9} = 3$, qui ne vérifie pas l'inégalité stricte.

**Réponse.** $[0\,;16]$ puis $]9\,;+\infty[$.

## Correction de l'exercice 7 – Simplifier une expression

Formules du cours : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{A^2} = |A|$.

— $\sqrt{16x^2} = \sqrt{16} \times \sqrt{x^2} = 4|x|$, et comme $x \geq 0$ on a $|x| = x$ : le résultat est $4x$.
— On reconnaît une identité remarquable sous le radical : $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Donc

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = |x + 1|$$

— Pour $x \geq -1$, $x + 1 \geq 0$ donc $|x + 1| = x + 1$.

**Piège.** Sans l'hypothèse sur $x$, la valeur absolue est obligatoire : pour $x = -5$, $\sqrt{(-5)^2} = 5$ et non $-5$.

**Réponse.** $4x$ puis $x + 1$.

## Correction de l'exercice 8 – Équation avec une racine

— Condition d'existence : $2x + 3 \geq 0$, soit $x \geq -1{,}5$.
— Les deux membres sont positifs : on élève au carré.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\sqrt{2x+3} = 5 \Longrightarrow 2x+3 = 25$$

— Donc $2x = 22$ et $x = 11$.

— $11 \geq -1{,}5$ : la condition est respectée. Vérification : $\sqrt{2\times 11+3} = \sqrt{25} = 5$.

**Réponse.** $S = \{11\}$.

## Correction de l'exercice 9 – Chute libre : durée de chute

On remplace $h$ par sa valeur dans la formule, en calculant d'abord le contenu de la racine.

— Pour $h = 45$ : $\dfrac{2\times 45}{9{,}81} = \dfrac{90}{9{,}81} \approx 9{,}174$, donc $t = \sqrt{9{,}174} \approx 3{,}03$ s.

— Pour $h = 20$ : $\dfrac{2\times 20}{9{,}81} = \dfrac{40}{9{,}81} \approx 4{,}077$, donc $t = \sqrt{4{,}077} \approx 2{,}02$ s.

— La hauteur a été divisée par 2,25 mais la durée seulement par 1,5 : il n'y a **pas** proportionnalité. C'est logique, car $t$ dépend de $\sqrt{h}$ : pour multiplier la durée par 2, il faut multiplier la hauteur par 4.

**Réponse.** $t \approx 3{,}03$ s et $t \approx 2{,}02$ s ; pas de proportionnalité ($t$ varie comme $\sqrt{h}$).

## Correction de l'exercice 10 – Diagonale et côté d'un carré

a) Le théorème de Pythagore dans le demi-carré rectangle donne $d^2 = 5^2 + 5^2 = 50$, donc

$$d = \sqrt{50} = \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07 \text{ cm}$$

b) L'aire d'un carré de côté $c$ vaut $c^2$, donc $c^2 = 50$ avec $c > 0$, d'où $c = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm.

— Les deux résultats coïncident : le carré d'aire 50 cm² a pour côté la diagonale du carré de côté 5 cm. Sa valeur approchée est 7,07 cm.

**Réponse.** a) $5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ cm · b) $5\sqrt{2}$ cm.

## Correction de l'exercice 11 – Lire la courbe

Les solutions de $\sqrt{x} = 1{,}5$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 1,5. On lit une seule valeur, entre 2 et 2,5. Par le calcul, 1,5 étant positif, on élève au carré :

$$\sqrt{x} = 1{,}5 \Leftrightarrow x = 1{,}5^2 = 2{,}25$$

Pour $\sqrt{x} > 2$, on cherche les points de la courbe situés au-dessus de la droite $y = 2$ : la courbe la coupe en $x = 4$ et reste au-dessus ensuite. Par le calcul, sur $[0\,;+\infty[$, la fonction carré conserve l'ordre des nombres positifs : $\sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4$. Donc $S = ]4\,;+\infty[$.

**Réponse.** $x = 2{,}25$ ; $S = ]4\,;+\infty[$.

## Correction de l'exercice 12 – Comparer x, x² et √x

On calcule les trois nombres dans chaque cas.

— Pour $x = 0{,}36$ : $x^2 = 0{,}129\,6$ et $\sqrt{x} = 0{,}6$ (car $0{,}6^2 = 0{,}36$). Donc $x^2 < x < \sqrt{x}$.

— Pour $x = 4$ : $x^2 = 16$ et $\sqrt{x} = 2$. Donc $\sqrt{x} < x < x^2$.

L'ordre s'inverse de part et d'autre de 1 :

$$0 < x < 1 \Longrightarrow x^2 < x < \sqrt{x} \qquad x > 1 \Longrightarrow \sqrt{x} < x < x^2$$

En effet, multiplier un nombre positif par un nombre inférieur à 1 le diminue : pour $0 < x < 1$, $x^2 = x\times x < x$.

**Réponse.** $x = 0{,}36$ : $x^2 < x < \sqrt{x}$ · $x = 4$ : $\sqrt{x} < x < x^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l’exercice 13 – Simplifier des racines

On fait apparaître le plus grand carré parfait sous chaque racine, puis on utilise $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour $a, b \geq 0$ :

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} \qquad \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$$

Pour la somme, on simplifie chaque terme avant de regrouper : $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ et $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, donc $\sqrt{12} + \sqrt{27} = 5\sqrt{3}$.

**Contrôle** : $\sqrt{12} + \sqrt{27} \approx 3{,}46 + 5{,}20 = 8{,}66$ et $5\sqrt{3} \approx 8{,}66$. Attention : $\sqrt{12} + \sqrt{27}$ n’est pas $\sqrt{39} \approx 6{,}24$.

**Réponse.** $4\sqrt{2}$ ; $5\sqrt{3}$ ; $5\sqrt{3}$.

## Correction de l’exercice 14 – Distance de freinage

On remplace $d$ par 49 : $v = 10\sqrt{49} = 10 \times 7 = 70$ km/h.

Pour $v = 90$, on isole la racine, puis on élève au carré, le nombre 9 étant positif :

$$10\sqrt{d} = 90 \Leftrightarrow \sqrt{d} = 9 \Leftrightarrow d = 81 \text{ m}$$

**Vérification** : $10 \times \sqrt{81} = 90$. En passant de 70 à 90 km/h, la vitesse augmente d’environ 29 %, mais la distance de freinage passe de 49 à 81 m, soit environ 65 % de plus : elle varie comme le carré de la vitesse.

**Réponse.** 70 km/h pour 49 m ; 81 m à 90 km/h.

## Correction de l’exercice 15 – Vrai ou faux, avec justification

a) **Faux.** Contre-exemple : $a = 9$ et $b = 16$ donnent $\sqrt{25} = 5$ alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. La racine carrée ne se distribue pas sur une somme (elle se distribue sur un produit).

b) **Faux.** Il faut $x \geq 0$ : $\sqrt{-4}$ n’existe pas dans $\mathbb{R}$.

c) **Vrai.** C’est la propriété du cours : au-delà de 1, la racine carrée est en dessous de la droite $y = x$. Par exemple $\sqrt{9} = 3 < 9$.

d) **Vrai.** Par définition, $\sqrt{7}$ est le nombre positif dont le carré vaut 7.

**Réponse.** a) faux · b) faux · c) vrai · d) vrai.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).