Plaquette 4 – Équations, inéquations et fonctions √(ax + b)

Fonction racine carrée — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Résoudre $\sqrt{A} = k$.

Signe de k	Solutions
$k < 0$	**aucune**
$k = 0$	$A = 0$
$k > 0$	$A = k^2$, à vérifier dans le domaine

Résoudre $\sqrt{A} = \sqrt{B}$. Cela équivaut à $A = B$, **avec** $A \geq 0$.

Résoudre $\sqrt{A} = B$ (avec B expression). On élève au carré, puis on **vérifie** chaque solution : l'élévation au carré peut **créer** des solutions parasites (celles pour lesquelles $B < 0$).

Inéquations (pour $k > 0$) :

$$\sqrt{A} \leq k \Leftrightarrow 0 \leq A \leq k^2 \qquad \sqrt{A} \geq k \Leftrightarrow A \geq k^2$$

Fonction $f(x) = \sqrt{ax + b}$.

— **Domaine** : $ax + b \geq 0$.

— **Variations** : **croissante** si $a > 0$, **décroissante** si $a < 0$.

— **Valeur minimale** : 0, atteinte en $x = -\dfrac{b}{a}$.

Transformations de courbe.

Fonction	Effet sur la courbe de $\sqrt{x}$
$\sqrt{x - c}$	translation de c vers la droite
$\sqrt{x} + c$	translation de c vers le haut
$k\sqrt{x}$	dilatation verticale de facteur k
$\sqrt{-x}$	symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

Règle d'or. Devant toute équation avec radical : **domaine d'abord**, résolution ensuite, **vérification** enfin.

Correction de l'exercice 1 – Équation de base

On fixe d'abord le domaine : $3x + 1 \geq 0$, soit $x \geq -\dfrac{1}{3}$. Le second membre, 4, est positif : on peut élever au carré.

$$\sqrt{3x + 1} = 4 \Leftrightarrow 3x + 1 = 16 \Leftrightarrow 3x = 15 \Leftrightarrow x = 5$$

La valeur 5 est dans le domaine. **Vérification** : $\sqrt{3 \times 5 + 1} = \sqrt{16} = 4$. Donc $S = \{5\}$.

Si le second membre était -4, il n'y aurait aucune solution ; s'il était 0, la seule solution serait $x = -\dfrac{1}{3}$. On regarde toujours le signe du second membre avant d'élever au carré.

Réponse. $S = \{5\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Deux radicaux

Les deux racines doivent exister : $2x+3 \geq 0$ et $x+7 \geq 0$, soit $x \geq -1{,}5$ (la seconde condition est alors automatique). Deux racines de nombres positifs sont égales si et seulement si ces nombres sont égaux :

$$\sqrt{2x+3} = \sqrt{x+7} \Leftrightarrow 2x+3 = x+7 \Leftrightarrow x = 4$$

La valeur 4 est dans le domaine. **Vérification** : $\sqrt{11} = \sqrt{11}$. Donc $S = \{4\}$.

Le domaine n'est pas un détail : pour $\sqrt{2x+3} = \sqrt{5x+12}$, le même calcul donnerait $x = -3$, qui doit être rejeté, car $2 \times (-3) + 3 < 0$.

Réponse. $S = \{4\}$ (valeur commune $\sqrt{11}$).

Correction de l'exercice 3 – Solution parasite

a) Le membre de gauche, une racine carrée, est positif ou nul ; il ne peut être égal à x que si $x \geq 0$. Il faut aussi $x+6 \geq 0$, ce qui est alors automatique.

b) Si $\sqrt{x+6} = x$, alors en élevant au carré, $x+6 = x^2$, soit $x^2 - x - 6 = 0$. En développant, $(x-3)(x+2) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6$.

c) Par la règle du produit nul, $x = 3$ ou $x = -2$. La valeur -2 ne vérifie pas $x \geq 0$: elle est rejetée. **Vérification** : $\sqrt{3+6} = 3$, mais $\sqrt{-2+6} = 2 \neq -2$.

$$S = \{3\}$$

L'élévation au carré fait perdre le signe : $a = b$ entraîne $a^2 = b^2$, mais pas l'inverse. Elle peut donc créer des solutions parasites, qu'on élimine par la condition de a) ou par vérification.

Réponse. a) une racine est positive · b) en élevant au carré · c) $S = \{3\}$; $x = -2$ est une solution **parasite**.

Correction de l'exercice 4 – Inéquation avec radical

On fixe le domaine : $2x - 4 \geq 0$, soit $x \geq 2$. Sur ce domaine, les deux membres sont positifs et l'on peut élever au carré sans changer le sens :

$$\sqrt{2x-4} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq 2x - 4 < 9 \Leftrightarrow 2 \leq x < 6{,}5$$

Donc $S = [2\,;6{,}5[$.

Vérification : $x = 6{,}5$ donne $\sqrt{9} = 3$, qui n'est pas strictement inférieur à 3 ; $x = 2$ donne $0 < 3$. Oublier le domaine conduirait à $]-\infty\,;6{,}5[$, qui contient des valeurs pour lesquelles la racine n'existe pas.

Réponse. $S = [2\,;6{,}5[$.

Correction de l'exercice 5 – Domaine et variations

Le domaine est donné par $8 - 2x \geq 0$, soit $x \leq 4$: $D_f =]-\infty\,;4]$.

Pour le sens de variation, on compare deux nombres $a < b$ du domaine. En multipliant par -2, l'ordre s'inverse : $-2a > -2b$, donc $8 - 2a > 8 - 2b \geq 0$. La fonction racine conserve l'ordre des nombres positifs :

$$a < b \leq 4 \Longrightarrow \sqrt{8-2a} > \sqrt{8-2b}$$

La fonction f est donc **décroissante** sur son domaine, bien que la racine soit croissante : c'est le coefficient -2 qui inverse l'ordre.

Quelques valeurs : $f(4) = 0$, son minimum ; $f(0) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$; $f(-4) = \sqrt{16} = 4$. Et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$f(x) = 2 \Leftrightarrow 8 - 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Réponse. $D_f =]-\infty\,;4]$, fonction **décroissante**, minimum 0 en $x = 4$.

Correction de l'exercice 6 – Équation avec deux solutions

a) Le membre de gauche est une racine, donc positif : il faut $x - 4 \geq 0$, soit $x \geq 4$. La condition $x + 2 \geq 0$ est alors automatique.

b) En élevant au carré : $x + 2 = (x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$, d'où $x^2 - 9x + 14 = 0$. En développant, $(x-2)(x-7) = x^2 - 7x - 2x + 14 = x^2 - 9x + 14$.

c) La règle du produit nul donne $x = 2$ ou $x = 7$. Seule la valeur 7 vérifie $x \geq 4$.

$$S = \{7\}$$

Vérification : $\sqrt{7+2} = 3$ et $7 - 4 = 3$. Pour $x = 2$, on aurait $\sqrt{4} = 2$ d'un côté et -2 de l'autre : c'est une solution parasite, créée par l'élévation au carré. Graphiquement, la courbe de $y = \sqrt{x+2}$ et la droite $y = x - 4$ se coupent une seule fois, en $(7\,;3)$.

Réponse. a) $x \geq 4$ · b) en élevant au carré · c) $S = \{7\}$; $x = 2$ est rejetée.

Correction de l'exercice 7 – Transformations de courbe

Chaque transformation de l'expression correspond à un déplacement de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$.

— $g(x) = \sqrt{x-3}$ prend en x la valeur que la fonction racine prend en $x - 3$: la courbe est **translatée de** 3 **vers la droite**. Par exemple $g(7) = 2 = \sqrt{4}$. Son domaine est $[3\,;+\infty[$.

— $h(x) = \sqrt{x} + 3$: chaque ordonnée augmente de 3, la courbe est **translatée de** 3 **vers le haut** ; $h(0) = 3$.

— $k(x) = 2\sqrt{x}$: chaque ordonnée est doublée, c'est une **dilatation verticale** de facteur 2 ; $k(4) = 4$.

$$2\sqrt{x} \neq \sqrt{2x} \qquad \text{car} \qquad \sqrt{2x} = \sqrt{2} \times \sqrt{x}$$

Contrôle en $x = 4$: $2\sqrt{4} = 4$, alors que $\sqrt{8} \approx 2{,}83$.

Réponse. g : translation de 3 à droite · h : translation de 3 vers le haut · k : dilatation verticale de facteur 2.

Correction de l'exercice 8 – Inéquation à deux radicaux

Les deux racines existent pour $x + 5 \geq 0$ et $2x + 1 \geq 0$, soit $x \geq -0{,}5$. Sur ce domaine, les nombres sous les racines sont positifs, et la fonction racine conserve l'ordre :

$$\sqrt{x+5} \leq \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow x + 5 \leq 2x + 1 \Leftrightarrow 4 \leq x$$

En tenant compte du domaine, $S = [4\,;+\infty[$.

Vérification : $x = 4$ donne $\sqrt{9} = \sqrt{9}$, égalité ; $x = 10$ donne $\sqrt{15} \approx 3{,}87 \leq \sqrt{21} \approx 4{,}58$; $x = 0$ donne $\sqrt{5} > 1$, l'inégalité est fausse.

Réponse. $S = [4\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 9 – Fonction composée et image

Le nombre sous la racine vérifie $x^2 + 9 \geq 9 > 0$ pour tout réel : $D_f = \mathbb{R}$.

Comme $x^2 \geq 0$, avec égalité seulement en 0, on a $x^2 + 9 \geq 9$, puis, la racine conservant l'ordre,

$$f(x) = \sqrt{x^2+9} \geq \sqrt{9} = 3$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Le minimum vaut 3, atteint en $x = 0$. Les valeurs prises sont tous les nombres à partir de 3 : pour $y \geq 3$, l'équation $\sqrt{x^2 + 9} = y$ équivaut à $x^2 = y^2 - 9 \geq 0$, qui a des solutions. L'image est donc $[3\,;+\infty[$.

Remarque géométrique : $f(x)$ est la distance entre les points $(x\,;0)$ et $(0\,;3)$. **Contrôle** : $f(4) = f(-4) = \sqrt{25} = 5$.

Réponse. $D_f = \mathbb{R}$, minimum 3 en $x = 0$, image $[3\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 10 – Équation sans solution

On **isole** d'abord la racine. Dans la première équation, $\sqrt{x-1} + 3 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = -2$. Une racine carrée n'étant jamais négative, il n'y a aucune solution : $S = \varnothing$.

Élever au carré trop tôt donnerait $x - 1 = 4$, soit $x = 5$, qui est faux : $\sqrt{4} + 3 = 5 \neq 1$.

Pour la seconde, $x^2 + 1 \geq 1$ pour tout x, donc

$$\sqrt{x^2 + 1} \geq \sqrt{1} = 1 > 0$$

La racine ne s'annule jamais : $S = \varnothing$. Réflexe : isoler la racine, puis examiner le signe de l'autre membre.

Réponse. $S = \varnothing$ dans les deux cas (racine négative impossible ; $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$).

Correction de l'exercice 11 – Problème de distance

La distance entre $M(x\,;0)$ et $A(4\,;3)$ se calcule avec la formule de distance :

$$AM = \sqrt{(x-4)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 9}$$

Un carré est positif ou nul, donc $(x-4)^2 + 9 \geq 9$, avec égalité seulement pour $x = 4$. La racine conservant l'ordre, $AM \geq \sqrt{9} = 3$: la distance minimale vaut 3, atteinte pour $M(4\,;0)$.

C'est le pied de la perpendiculaire menée de A à l'axe des abscisses : la plus courte distance d'un point à une droite. **Contrôle** : $x = 0$ et $x = 8$, symétriques par rapport à 4, donnent tous deux $AM = 5$.

Réponse. $AM = \sqrt{(x-4)^2 + 9}$, minimale et égale à 3 pour $x = 4$.

Correction de l'exercice 12 – Inéquation avec produit

a) Pour $x \geq 0$, $t = \sqrt{x}$ est positif et $x = t^2$. Donc $x\sqrt{x} = t^2 \times t = t^3$, et l'inéquation devient $t^3 \leq 8$.

b) La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$ et $2^3 = 8$:

$$t^3 \leq 8 \Leftrightarrow t^3 \leq 2^3 \Leftrightarrow t \leq 2$$

Avec $t \geq 0$, on obtient $0 \leq \sqrt{x} \leq 2$, soit $0 \leq x \leq 4$: $S = [0\,;4]$.

Vérification : $x = 4$ donne $4 \times 2 = 8$, la borne est incluse ; $x = 9$ donne $9 \times 3 = 27 > 8$.

Réponse. a) car $x = t^2$ · b) $0 \leq t \leq 2$, donc $S = [0\,;4]$.

Correction de l'exercice 13 – Résoudre une équation par substitution

a) Pour $x \geq 0$, $t = \sqrt{x} \geq 0$ et $x = t^2$: l'équation devient $t^2 - 5t + 6 = 0$.

b) En développant, $(t-2)(t-3) = t^2 - 3t - 2t + 6 = t^2 - 5t + 6$. La règle du produit nul donne $t = 2$ ou $t = 3$, deux valeurs positives qui conviennent. On revient à x :

$$\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \qquad \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Donc $S = \{4\,;9\}$. **Vérification** : $4 - 5\times 2 + 6 = 0$ et $9 - 5\times 3 + 6 = 0$.

Si une valeur de t avait été négative, on l'aurait rejetée, puisque $t = \sqrt{x} \geq 0$.

Réponse. a) car $x = t^2$ · b) $t = 2$ ou $t = 3$, donc $S = \{4\,;9\}$.

Correction de l'exercice 14 – Comparaison de deux fonctions

On utilise $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$ pour des nombres positifs :

$$f(x) = \sqrt{4x} = \sqrt{4}\times\sqrt{x} = 2\sqrt{x} = g(x)$$

Les deux fonctions sont **égales** sur $[0\,;+\infty[$. **Contrôle** : $x = 9$ donne $\sqrt{36} = 6$ et $2\times 3 = 6$.

Ce n'est pas le cas pour une somme : $\sqrt{4+x}$ n'est pas égal à $2+\sqrt{x}$. Pour $x = 5$, on obtient $\sqrt{9} = 3$ contre $2+\sqrt{5} \approx 4{,}24$. La racine se distribue sur un produit, jamais sur une somme.

Réponse. Elles sont **égales** : $\sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$ pour tout $x \geq 0$.

Correction de l'exercice 15 – Résolution graphique et algébrique

On fixe le domaine, $x \geq 0$; le second membre $\frac{x}{2}$ y est positif, on peut élever au carré :

$$\sqrt{x} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0$$

Les solutions sont 0 et 4, toutes deux dans le domaine. **Vérification** : $\sqrt{4} = 2 = \frac{4}{2}$.

Graphiquement, la courbe de la racine et la droite $y = \frac{x}{2}$ se coupent en $(0\,;0)$ et $(4\,;2)$. Entre les deux, la courbe est au-dessus : $\sqrt{1} = 1 > 0{,}5$; au-delà de 4, la droite passe au-dessus : $\sqrt{9} = 3 < 4{,}5$.

Réponse. $S = \{0\,;4\}$; la courbe est au-dessus de la droite sur $]0\,;4[$.

Correction de l'exercice 16 – Fonction avec deux radicaux

Les deux racines doivent exister : $x - 1 \geq 0$ et $5 - x \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq 1$ et $x \leq 5$. Le domaine est l'intersection :

$$D_f = [1\,;5]$$

On remplace x par chaque valeur : $f(1) = 0 + \sqrt{4} = 2$, $f(3) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ et $f(5) = \sqrt{4} + 0 = 2$.

Les valeurs sont symétriques par rapport au milieu 3 du domaine : en remplaçant x par $6 - x$, on obtient $\sqrt{5-x} + \sqrt{x-1}$, la même expression. **Contrôle** : $f(2) = f(4) = 1 + \sqrt{3} \approx 2{,}73$. Les valeurs calculées suggèrent un maximum au centre.

Réponse. $D_f = [1\,;5]$; $f(1) = f(5) = 2$ et $f(3) = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ (maximum).

Correction de l'exercice 17 – Synthèse : étude et résolution

a) Le domaine est donné par $2x + 8 \geq 0$, soit $D_f = [-4\,;+\infty[$. Si $-4 \leq a < b$, alors $0 \leq 2a + 8 < 2b + 8$, et la racine conserve l'ordre : $f(a) < f(b)$. La fonction est strictement croissante.

b) $f(x) = 6 \Leftrightarrow 2x + 8 = 36 \Leftrightarrow x = 14$. Pour l'inéquation, les deux membres sont positifs :

$$f(x) \geq 4 \Leftrightarrow 2x + 8 \geq 16 \Leftrightarrow x \geq 4$$

c) Sur $[-4\,;0[$, $f(x) \geq 0 > x$. Sur $[0\,;+\infty[$, on compare les carrés : $x^2 - (2x+8) = x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$ (on le vérifie en développant), du signe de $x - 4$ puisque $x + 2 > 0$. Donc $f(x) > x$ sur $[-4\,;4[$, $f(4) = 4$, et $f(x) < x$ pour $x > 4$. **Contrôle** : $f(9) = \sqrt{26} \approx 5{,}1 < 9$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) $[-4\,;+\infty[$, croissante · b) $x = 14$ puis $[4\,;+\infty[$ · c) $f(x) > x$ sur $[-4\,;4[$, égalité en 4, puis $f(x) < x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).