

Plaquette 4 – Équations, inéquations et fonctions composées

Fonction racine carrée — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Résoudre $\sqrt{A} = k$.

Signe de k	Solutions
$k < 0$	aucune
$k = 0$	$A = 0$
$k > 0$	$A = k^2$, à vérifier dans le domaine

Résoudre $\sqrt{A} = \sqrt{B}$. Cela équivaut à $A = B$, avec $A \geq 0$.

Résoudre $\sqrt{A} = B$ (avec B expression). On élève au carré, puis on **vérifie** chaque solution : l'élévation au carré peut **créer** des solutions parasites (celles pour lesquelles $B < 0$).

Inéquations (pour $k > 0$) :

$$\sqrt{A} \leq k \Leftrightarrow 0 \leq A \leq k^2 \quad \sqrt{A} \geq k \Leftrightarrow A \geq k^2$$

Fonction $f(x) = \sqrt{ax + b}$.

- **Domaine** : $ax + b \geq 0$.
- **Variations** : **croissante** si $a > 0$, **décroissante** si $a < 0$.
- **Valeur minimale** : 0, atteinte en $x = -\frac{b}{a}$.

Transformations de courbe.

Fonction	Effet sur la courbe de $\sqrt{x}$
$\sqrt{x - c}$	translation de c vers la droite
$\sqrt{x} + c$	translation de c vers le haut
$k\sqrt{x}$	dilatation verticale de facteur k
$\sqrt{-x}$	symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

Règle d'or. Devant toute équation avec radical : **domaine d'abord**, résolution ensuite, **vérification** enfin.

Correction de l'exercice 1 – Équation de base

- **Domaine** : $3x + 1 \geq 0$, soit $x \geq -\frac{1}{3}$ ✓
- **Élévation au carré** (le second membre 4 est positif) :

$$3x + 1 = 16 \quad \Rightarrow \quad 3x = 15 \quad \Rightarrow \quad x = 5$$
- **Vérification du domaine** : $5 \geq -\frac{1}{3}$ ✓
- **Vérification dans l'équation** : $\sqrt{16} = 4$ ✓

$$S = \{5\}$$

- **Unicité** : la fonction $x \mapsto \sqrt{3x+1}$ est **strictement croissante**, donc elle ne prend chaque valeur qu'une fois ✓
 - **Contrôles** : $x = 4$ donne $\sqrt{13} \approx 3,606 < 4$ ✓ ; $x = 6$ donne $\sqrt{19} \approx 4,359 > 4$ ✓
 - **Variante sans solution** : $\sqrt{3x+1} = -4$ n'a **aucune** solution ✓
 - **Variante à solution unique triviale** : $\sqrt{3x+1} = 0$ donne $x = -\frac{1}{3}$ ✓
 - **Contrôle** : $3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$ ✓
 - **Méthode** : toujours vérifier le **signe du second membre** avant d'élever au carré ✓
- Réponse.** $S = \{5\}$.

Correction de l'exercice 2 - Deux radicaux

- **Conditions** : $2x + 3 \geq 0$ (soit $x \geq -1,5$) et $x + 7 \geq 0$ (soit $x \geq -7$).
 - **Domaine commun** : $x \geq -1,5$ ✓
 - **Égalité des radicandes** :

$$2x + 3 = x + 7 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$
 - **Vérification du domaine** : $4 \geq -1,5$ ✓
 - **Vérification** : $\sqrt{11} = \sqrt{11}$ ✓

$$S = \{4\}$$
 - **Justification** : la fonction racine étant **injective** sur les positifs, deux racines sont égales si et seulement si les radicandes le sont ✓
 - **Valeur commune** : $\sqrt{11} \approx 3,3166$ ✓
 - **Contrôles** : $x = 3$ donne $\sqrt{9} = 3$ et $\sqrt{10} \approx 3,162$ — différents ✓
 - $x = 5$ donne $\sqrt{13} \approx 3,606$ et $\sqrt{12} \approx 3,464$ — différents ✓
 - **Piège du domaine** : si la solution avait été $x = -3$, il aurait fallu la **rejeter** ($-3 < -1,5$) ✓
 - **Exemple** : $\sqrt{2x+3} = \sqrt{5x+12}$ donne $x = -3$, à rejeter car $2(-3) + 3 = -3 < 0$ ✓
- Réponse.** $S = \{4\}$ (valeur commune $\sqrt{11}$).

Correction de l'exercice 3 - Solution parasite

- **Conditions** : $x + 6 \geq 0$ (soit $x \geq -6$) **et** $x \geq 0$, car une racine est positive ✓
- **Domaine utile** : $x \geq 0$ ✓
- **Élévation au carré** :

$$x + 6 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0$$
- **Factorisation** : deux nombres de produit -6 et de somme -1 — ce sont -3 et 2 .

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$
- **Solutions candidates** : $x = 3$ ou $x = -2$.
- **Sélection** : $-2 < 0$, donc **rejetée** ✓

$$S = \{3\}$$
- **Vérifications** : $\sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3$ ✓ ; et $\sqrt{-2+6} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$ ✓
- **Nature de la solution parasite** : elle vérifie l'équation **élevée au carré**, mais pas l'équation d'origine ✓
- **Origine du problème** : élever au carré fait perdre l'information de **signe** ✓
- **Illustration** : $a = b$ implique $a^2 = b^2$, mais la réciproque est **fausse** ($2 \neq -2$ alors que $4 = 4$) ✓

- **Règle absolue** : après élévation au carré, **vérifier chaque solution** dans l'équation initiale ✓
- **Interprétation graphique** : la courbe $y = \sqrt{x+6}$ et la droite $y = x$ se coupent en **un seul** point, $(3; 3)$ ✓

Réponse. $S = \{3\}$; $x = -2$ est une solution **parasite** (la racine ne peut être négative).

Correction de l'exercice 4 - Inéquation avec radical

- **Domaine** : $2x - 4 \geq 0$, soit $x \geq 2$ ✓
- **Élévation au carré** (les deux membres sont positifs) :

$$2x - 4 < 9 \quad \Rightarrow \quad 2x < 13 \quad \Rightarrow \quad x < 6,5$$
- **Intersection avec le domaine** :

$$S = [2; 6,5[$$
- **Vérifications** : $x = 2$ donne $\sqrt{0} = 0 < 3$ ✓ ; $x = 6,5$ donne $\sqrt{9} = 3$, donc **exclu** ✓ ; $x = 7$ donne $\sqrt{10} \approx 3,162 > 3$ ✓ ; $x = 1$ **hors domaine** ✓
- **Erreur classique** : oublier la borne 2 et écrire $] - \infty; 6,5[$ ✓
- **Inéquation contraire** : $\sqrt{2x-4} \geq 3$ donne $[6,5; +\infty[$ ✓
- **Contrôle** : l'union des deux solutions redonne le domaine $[2; +\infty[$ ✓
- **Cas d'un second membre négatif** : $\sqrt{2x-4} < -1$ n'a **aucune** solution ✓
- **Cas particulier** : $\sqrt{2x-4} \geq 0$ est vraie sur **tout** le domaine ✓
- **Méthode en trois temps** : domaine, résolution, intersection ✓

Réponse. $S = [2; 6,5[$.

Correction de l'exercice 5 - Domaine et variations

- **Domaine** : $8 - 2x \geq 0$, soit $x \leq 4$.

$$D_f =] - \infty; 4]$$
- **Variations** : la fonction interne $x \mapsto 8 - 2x$ est **décroissante** (coefficient -2), et la racine est croissante — donc f est **décroissante** ✓
- **Tableau** :

x	$-\infty$	4
$f(x)$	$+\infty$	0

- **Valeurs** : $f(4) = 0$ ✓ ; $f(0) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,8284$ ✓ ; $f(-4) = \sqrt{16} = 4$ ✓ ; $f(3,5) = \sqrt{1} = 1$ ✓
- **Maximum** : il n'y en a **pas**, la fonction tendant vers $+\infty$ ✓
- **Minimum** : 0, atteint en $x = 4$ ✓
- **Image** : $f(D_f) = [0; +\infty[$ ✓
- **Piège du sens de variation** : on pourrait croire que f est croissante comme la racine — mais la composition avec une fonction décroissante **inverse** le sens ✓
- **Contrôle** : $f(0) = 2,83 > f(3) = \sqrt{2} \approx 1,41$ ✓, ce qui confirme la décroissance
- **Lien avec la courbe de référence** : c'est la courbe de $\sqrt{x}$, **comprimée** horizontalement d'un facteur 2 puis **retournée** ✓
- **Résolution de $f(x) = 2$** : $8 - 2x = 4$, donc $x = 2$ ✓
- **Contrôle** : $\sqrt{8-4} = 2$ ✓

Réponse. $D_f =] - \infty; 4]$, fonction **décroissante**, minimum 0 en $x = 4$.

Correction de l'exercice 6 - Équation avec deux solutions

- **Conditions** : $x + 2 \geq 0$ (soit $x \geq -2$) **et** $x - 4 \geq 0$ (soit $x \geq 4$) ✓
- **Domaine utile** : $x \geq 4$ ✓
- **Élévation au carré** :

$$x + 2 = (x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

- **Réarrangement** : $x^2 - 9x + 14 = 0$.
- **Factorisation** : deux nombres de produit 14 et de somme 9 — ce sont 2 et 7.

$$(x - 2)(x - 7) = 0$$
- **Candidates** : $x = 2$ ou $x = 7$.
- **Sélection** : $2 < 4$, donc **rejetée** ✓

$$S = \{7\}$$

- **Vérifications** : $\sqrt{7+2} = 3$ et $7-4 = 3$ ✓ ; $\sqrt{2+2} = 2$ mais $2-4 = -2 \neq 2$ ✓
- **Origine du rejet** : pour $x = 2$, le second membre est **négatif**, ce qu'une racine ne peut évaluer ✓
- **Importance de la condition** $x \geq 4$: elle élimine la parasite **sans même** vérifier ✓
- **Interprétation graphique** : la courbe $y = \sqrt{x+2}$ et la droite $y = x - 4$ se coupent une seule fois, en $(7; 3)$ ✓
- **Contrôle** : pour $x = 6$, on a $\sqrt{8} \approx 2,828$ contre 2 — la courbe est **au-dessus** ✓
- **Pour** $x = 8$: $\sqrt{10} \approx 3,162$ contre 4 — la droite est passée au-dessus ✓

Réponse. $S = \{7\}$; $x = 2$ est rejetée car $x - 4$ y est négatif.

Correction de l'exercice 7 - Transformations de courbe

- **Pour** g : la courbe de $\sqrt{x}$ **translatée de 3 vers la droite** ✓
- **Domaine** : $[3; +\infty[$ ✓
- **Contrôles** : $g(3) = 0$ (au lieu de $f(0) = 0$) ✓ ; $g(7) = 2$ (au lieu de $f(4) = 2$) ✓
- **Pour** h : la courbe **translatée de 3 vers le haut** ✓
- **Domaine** : $[0; +\infty[$, inchangé ✓
- **Contrôles** : $h(0) = 3$ ✓ ; $h(4) = 5$ ✓
- **Image** : $[3; +\infty[$ ✓
- **Pour** k : la courbe **dilatée verticalement** d'un facteur 2 ✓
- **Contrôles** : $k(4) = 4$ (au lieu de 2) ✓ ; $k(9) = 6$ ✓
- **Attention** : $2\sqrt{x} \neq \sqrt{2x}$ — en effet $\sqrt{2x} = \sqrt{2}\sqrt{x} \approx 1,414\sqrt{x}$ ✓
- **Contrôle** : en $x = 4$, $2\sqrt{4} = 4$ mais $\sqrt{8} \approx 2,828$ ✓
- **Interprétation de** $\sqrt{2x}$: c'est une **compression horizontale** de facteur 2, équivalente à une dilatation verticale de facteur $\sqrt{2}$ ✓
- **Cas de** $\sqrt{-x}$: symétrie par rapport à l'axe des **ordonnées**, de domaine $] -\infty; 0]$ ✓
- **Cas de** $-\sqrt{x}$: symétrie par rapport à l'axe des **abscisses**, d'image $] -\infty; 0]$ ✓

Réponse. g : translation de 3 à droite · h : translation de 3 vers le haut · k : dilatation verticale de facteur 2.

Correction de l'exercice 8 - Inéquation à deux radicaux

- **Conditions** : $x + 5 \geq 0$ (soit $x \geq -5$) et $2x + 1 \geq 0$ (soit $x \geq -0,5$).
- **Domaine commun** : $x \geq -0,5$ ✓
- **Élévation au carré** (les deux membres sont positifs, et la racine est croissante) :

$$x + 5 \leq 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad 4 \leq x$$

— **Intersection avec le domaine :**

$$S = [4; +\infty[$$

- **Vérifications :** $x = 4$ donne $\sqrt{9} = 3$ et $\sqrt{9} = 3$ — **égalité** ✓
- $x = 10$ donne $\sqrt{15} \approx 3,873$ et $\sqrt{21} \approx 4,583$ ✓
- $x = 0$ donne $\sqrt{5} \approx 2,236$ et $\sqrt{1} = 1$ — l'inégalité est **fausse** ✓
- **Justification de l'élévation au carré :** la fonction racine est **croissante**, donc $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ équivaut à $a \leq b$ pour $a, b \geq 0$ ✓
- **Point de croisement :** $x = 4$, où les deux expressions valent 3 ✓
- **Comportement au-delà :** le second radicande croît **deux fois plus vite**, donc l'écart se creuse ✓
- **Contrôle :** pour $x = 100$, $\sqrt{105} \approx 10,25$ contre $\sqrt{201} \approx 14,18$ ✓
- **Piège du domaine :** sans la condition $x \geq -0,5$, on aurait pu croire que des valeurs négatives conviennent ✓

Réponse. $S = [4; +\infty[$.

Correction de l'exercice 9 - Fonction composée et image

- **Domaine :** $x^2 + 9 \geq 9 > 0$ **toujours**, donc

$$D_f = \mathbb{R}$$
- **Minimum du radicande :** $x^2 + 9$ est minimal pour $x = 0$, où il vaut 9 ✓
- **Minimum de f :** la racine étant croissante, elle atteint son minimum au même endroit.

$$f(0) = \sqrt{9} = 3$$
- **Image :** quand $|x|$ croît, $f(x)$ croît sans limite, donc

$$f(\mathbb{R}) = [3; +\infty[$$
- **Parité :** $f(-x) = f(x)$ — la fonction est **paire** ✓
- **Contrôles :** $f(4) = \sqrt{25} = 5$ ✓ ; $f(-4) = 5$ ✓ ; $f(1) = \sqrt{10} \approx 3,162$ ✓
- **Variations :** décroissante sur $] -\infty; 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$ ✓
- **Interprétation géométrique :** $f(x)$ est la distance du point $(x; 0)$ au point $(0; 3)$ ✓
- **Contrôle :** la distance minimale est bien 3, atteinte à la verticale ✓
- **Comportement à l'infini :** $f(x)$ se rapproche de $|x|$ ✓
- **Contrôle :** $f(100) = \sqrt{10\,009} \approx 100,045$, très proche de 100 ✓
- **Résolution de $f(x) = 5$:** $x^2 = 16$, donc $x = \pm 4$ — **deux** solutions, par parité ✓

Réponse. $D_f = \mathbb{R}$, minimum 3 en $x = 0$, image $[3; +\infty[$.

Correction de l'exercice 10 - Équation sans solution

- **Première équation :** $\sqrt{x-1} = 1-3 = -2$.
- **Conclusion :** une racine carrée ne peut être **négative**, donc

$$S = \emptyset$$
- **Piège :** élever au carré donnerait $x-1 = 4$, soit $x = 5$ — une solution **parasite** ✓
- **Vérification :** $\sqrt{5-1} + 3 = 2 + 3 = 5 \neq 1$ ✓
- **Seconde équation :** $x^2 + 1 \geq 1 > 0$, donc la racine est **toujours strictement positive** ✓
- **Conclusion :** elle ne peut jamais valoir 0.

$$S = \emptyset$$

- **Contrôles** : $\sqrt{0+1} = 1$ ✓ ; $\sqrt{1+1} \approx 1,414$ ✓ ; le minimum est 1, atteint en $x = 0$ ✓
- **Réflexe** : **isoler** la racine avant tout, puis examiner le signe du second membre ✓
- **Variante avec solution** : $\sqrt{x-1} + 3 = 5$ donne $\sqrt{x-1} = 2$, soit $x = 5$ ✓
- **Vérification** : $\sqrt{4} + 3 = 5$ ✓
- **Autre variante** : $\sqrt{x^2+1} = 1$ donne $x^2 = 0$, soit $x = 0$ — une solution unique ✓
- **Leçon** : ne jamais élever au carré **avant** d'avoir isolé la racine et vérifié le signe ✓

Réponse. $S = \emptyset$ dans les deux cas (racine négative impossible ; $\sqrt{x^2+1} \geq 1$).

Correction de l'exercice 11 - Problème de distance

- **Distance** :

$$AM = \sqrt{(x-4)^2 + 9}$$

- **Domaine** : $\mathbb{R}$, l'expression sous la racine étant toujours ≥ 9 ✓
 - **Minimum du radicande** : atteint pour $x = 4$, où il vaut 9 ✓
 - **Distance minimale** :
- $$AM_{\min} = \sqrt{9} = 3$$
- **Position** : $M(4; 0)$, le **projeté orthogonal** de A sur l'axe ✓
 - **Contrôles** : $x = 4$ donne 3 ✓ ; $x = 0$ donne $\sqrt{16+9} = 5$ ✓ ; $x = 8$ donne 5 ✓
 - **Symétrie** : les valeurs $x = 0$ et $x = 8$ donnent la **même** distance, étant symétriques par rapport à 4 ✓
 - **Interprétation** : la distance minimale d'un point à une droite est la longueur de la **perpendiculaire** ✓
 - **Ici** : c'est l'ordonnée de A , soit 3 ✓
 - **Distance pour** $x = 4,5$: $\sqrt{0,25+9} \approx 3,041$ ✓
 - **Platitude au minimum** : un écart de 0,5 sur x ne coûte que 0,041 sur la distance — c'est le propre d'un minimum ✓
 - **Résolution de** $AM = 5$: $(x-4)^2 = 16$, donc $x = 0$ ou $x = 8$ ✓
 - **Résolution de** $AM = 2$: impossible, car $2 < 3$ ✓

Réponse. $AM = \sqrt{(x-4)^2 + 9}$, minimale et égale à 3 pour $x = 4$.

Correction de l'exercice 12 - Inéquation avec produit

- **Réécriture** : $x\sqrt{x} = \sqrt{x^2 \times x} = \sqrt{x^3}$, ou encore $x^{3/2}$ ✓
- **Élévation au carré** (les deux membres sont positifs) :

$$x^3 \leq 64$$

- **Racine cubique** : la fonction cube étant croissante,

$$x \leq 4$$

- **Avec le domaine** :

$$S = [0; 4]$$

- **Vérifications** : $x = 4$ donne $4 \times 2 = 8$ ✓ ; $x = 0$ donne $0 \leq 8$ ✓ ; $x = 9$ donne $9 \times 3 = 27 > 8$ ✓
- **Croissance de l'expression** : $x\sqrt{x}$ est **croissante** sur $[0; +\infty[$, produit de deux fonctions croissantes positives ✓

- **Conséquence** : la solution est nécessairement un intervalle $[0; a]$ ✓
- **Contrôle intermédiaire** : $x = 3$ donne $3 \times 1,732 = 5,196 \leq 8$ ✓
- **Méthode alternative** : poser $t = \sqrt{x}$, d'où $t^3 \leq 8$, soit $t \leq 2$ et $x \leq 4$ ✓
- **Contrôle** : $t = \sqrt{4} = 2$ ✓
- **Généralisation** : $x\sqrt{x} \leq k$ équivaut à $x \leq k^{2/3}$ ✓
- **Contrôle** : $8^{2/3} = 4$ ✓

Réponse. $S = [0; 4]$.

Correction de l'exercice 13 - Résoudre une équation par substitution

- **Substitution** : avec $t = \sqrt{x} \geq 0$, on a $x = t^2$, d'où

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$
- **Factorisation** : deux nombres de produit 6 et de somme 5 — ce sont 2 et 3.

$$(t - 2)(t - 3) = 0$$
- **Solutions en t** : $t = 2$ ou $t = 3$, **toutes deux positives** ✓
- **Retour à x** : $\sqrt{x} = 2$ donne $x = 4$; $\sqrt{x} = 3$ donne $x = 9$.

$$S = \{4; 9\}$$
- **Vérifications** : $4 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$ ✓ ; $9 - 5 \times 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$ ✓
- **Vigilance sur le signe de t** : il faut **écarter** toute racine négative en t ✓
- **Exemple où c'est nécessaire** : $x + \sqrt{x} - 6 = 0$ donne $t^2 + t - 6 = 0$, soit $t = 2$ ou $t = -3$ — seule $t = 2$ convient, d'où $x = 4$ ✓
- **Vérification** : $4 + 2 - 6 = 0$ ✓
- **Méthode** : la substitution ramène une équation « en $\sqrt{x}$ » à une équation du **second degré** ✓
- **Contrôle du domaine** : les deux solutions 4 et 9 sont positives ✓
- **Contrôle intermédiaire** : $x = 6,25$ donne $6,25 - 12,5 + 6 = -0,25 < 0$ — l'expression est bien **négative entre** les racines ✓

Réponse. $S = \{4; 9\}$ (en posant $t = \sqrt{x}$, on résout $t^2 - 5t + 6 = 0$).

Correction de l'exercice 14 - Comparaison de deux fonctions

- **Simplification de f** : $\sqrt{4x} = \sqrt{4} \times \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$ ✓
- **Conclusion** : les deux fonctions sont **égales** !

$$f(x) = g(x) \quad \text{pour tout } x \geq 0$$
- **Contrôles** : $x = 9$ donne $\sqrt{36} = 6$ et $2 \times 3 = 6$ ✓ ; $x = 2$ donne $\sqrt{8} \approx 2,828$ et $2 \times 1,414 = 2,828$ ✓
- **Justification** : la règle $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ s'applique, 4 et x étant positifs ✓
- **Contraste avec une somme** : $\sqrt{4 + x} \neq 2 + \sqrt{x}$ ✓
- **Contre-exemple** : $x = 0$ donne $\sqrt{4} = 2$ contre $2 + 0 = 2$ — égalité **fortuite** ✓
- **Autre valeur** : $x = 5$ donne $\sqrt{9} = 3$ contre $2 + 2,236 = 4,236$ — bien différents ✓
- **Comparaison de $\sqrt{4x}$ et $\sqrt{x} + 2$** : les carrés valent $4x$ et $x + 4\sqrt{x} + 4$, de différence $3x - 4\sqrt{x} - 4$.
- **Avec $t = \sqrt{x}$** : $3t^2 - 4t - 4 = (3t + 2)(t - 2)$, du signe de $t - 2$ ✓
- **Conclusion** : $\sqrt{4x} > \sqrt{x} + 2$ pour $x > 4$, et l'inverse pour $0 \leq x < 4$ ✓
- **Contrôles** : $x = 9$ donne $6 > 5$ ✓ ; $x = 1$ donne $2 < 3$ ✓ ; $x = 4$ donne $4 = 4$ ✓
- **Leçon** : le produit se distribue sous la racine, jamais la somme ✓

Réponse. Elles sont **égales** : $\sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$ pour tout $x \geq 0$.

Correction de l'exercice 15 - Résolution graphique et algébrique

- **Domaine** : $x \geq 0$, et il faut $\frac{x}{2} \geq 0$, ce qui est automatique ✓
- **Élévation au carré** :

$$x = \frac{x^2}{4} \implies 4x = x^2 \implies x(x - 4) = 0$$
- **Solutions** : $x = 0$ ou $x = 4$, **toutes deux** dans le domaine ✓
 $S = \{0; 4\}$
- **Vérifications** : $\sqrt{0} = 0 = \frac{0}{2}$ ✓ ; $\sqrt{4} = 2 = \frac{4}{2}$ ✓
- **Interprétation graphique** : la courbe de $\sqrt{x}$ et la droite $y = \frac{x}{2}$ se coupent en $(0; 0)$ et $(4; 2)$ ✓
- **Position relative** : pour $0 < x < 4$, la **courbe** est au-dessus ; pour $x > 4$, la **droite** l'est ✓
- **Contrôles** : $x = 1$ donne $1 > 0,5$ ✓ ; $x = 9$ donne $3 < 4,5$ ✓
- **Justification** : $\sqrt{x} - \frac{x}{2} = \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)$, du signe de $2 - \sqrt{x}$ ✓
- **Écart maximal** : atteint quand $\sqrt{x} = 1$, soit $x = 1$, où il vaut $0,5$ ✓
- **Contrôle** : en $x = 0,81$, l'écart vaut $0,9 - 0,405 = 0,495 < 0,5$ ✓
- **Généralisation** : $\sqrt{x} = kx$ a pour solutions 0 et $\frac{1}{k^2}$ ✓
- **Contrôle** : pour $k = 0,5$, cela donne $\frac{1}{0,25} = 4$ ✓

Réponse. $S = \{0; 4\}$; la courbe est au-dessus de la droite sur $]0; 4[$.

Correction de l'exercice 16 - Fonction avec deux radicaux

- **Deux conditions** : $x - 1 \geq 0$ (soit $x \geq 1$) **et** $5 - x \geq 0$ (soit $x \leq 5$).
 - **Domaine** : l'**intersection** des deux.
 $D_f = [1; 5]$
 - **Valeurs** :
 - $f(1) = 0 + \sqrt{4} = 2$ ✓
 - $f(3) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \approx 2,8284$ ✓
 - $f(5) = \sqrt{4} + 0 = 2$ ✓
 - **Symétrie** : $f(1) = f(5) = 2$ ✓
 - **Explication** : le domaine est symétrique par rapport à son milieu 3 , et l'expression aussi ✓
 - **Vérification de la symétrie** : $f(6 - x) = \sqrt{5 - x} + \sqrt{x - 1} = f(x)$ ✓
 - **Contrôle** : $f(2) = 1 + \sqrt{3} \approx 2,7321$ et $f(4) = \sqrt{3} + 1 \approx 2,7321$ ✓
 - **Maximum** : atteint au **centre** $x = 3$, où $f = 2\sqrt{2} \approx 2,83$ ✓
 - **Minimum** : 2 , atteint aux **deux bornes** ✓
 - **Image** : $[2; 2\sqrt{2}]$ ✓
 - **Piège** : un domaine borné **des deux côtés** est le propre d'une somme de deux radicaux « opposés » ✓
 - **Cas de domaine vide** : $\sqrt{x - 5} + \sqrt{1 - x}$ exigerait $x \geq 5$ et $x \leq 1$ — **impossible** ✓
- Réponse.** $D_f = [1; 5]$; $f(1) = f(5) = 2$ et $f(3) = 2\sqrt{2} \approx 2,83$ (maximum).

Correction de l'exercice 17 - Synthèse : étude et résolution

a) **Domaine** : $2x + 8 \geq 0$, soit

$$D_f = [-4; +\infty[$$

— **Variations** : $x \mapsto 2x + 8$ est croissante et la racine aussi, donc f est **strictement croissante** ✓

— **Valeurs** : $f(-4) = 0$ ✓ ; $f(0) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,8284$ ✓ ; $f(4) = 4$ ✓ ; $f(14) = 6$ ✓

— **Image** : $[0; +\infty[$ ✓

b) **Équation** $f(x) = 6$: $2x + 8 = 36$, donc $2x = 28$ et

$$x = 14$$

— **Vérification** : $\sqrt{36} = 6$ ✓

— **Inéquation** $f(x) \geq 4$: $2x + 8 \geq 16$, soit $x \geq 4$.

$$S = [4; +\infty[$$

— **Vérifications** : $f(4) = \sqrt{16} = 4$ ✓ ; $f(3) = \sqrt{14} \approx 3,742 < 4$ ✓

c) **Comparaison de $f(x)$ et x .**

— **Sur** $[-4; 0[$: $f(x) \geq 0 > x$, donc $f(x) > x$ ✓

— **Sur** $[0; +\infty[$: on compare les carrés, $2x + 8$ contre x^2 .

— **Différence** : $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$, du signe de $x - 4$ sur les positifs ✓

— **Conclusion** :

— $f(x) > x$ pour $-4 \leq x < 4$;

— $f(4) = 4$ — **égalité** ;

— $f(x) < x$ pour $x > 4$.

— **Contrôles** : $f(0) = 2,83 > 0$ ✓ ; $f(2) = \sqrt{12} \approx 3,464 > 2$ ✓ ; $f(4) = 4$ ✓ ;
 $f(9) = \sqrt{26} \approx 5,099 < 9$ ✓

— **Interprétation graphique** : la courbe de f coupe la droite $y = x$ au seul point $(4; 4)$, en passant du dessus au dessous ✓

— **Contrôle du point de croisement** : $2 \times 4 + 8 = 16 = 4^2$ ✓

— **Comportement à l'infini** : f croît comme $\sqrt{2x}$, infiniment plus lentement que x ✓

— **Contrôle** : $f(100) = \sqrt{208} \approx 14,42$, très loin de 100 ✓

Réponse. a) $[-4; +\infty[$, croissante · b) $x = 14$ puis $[4; +\infty[$ · c) $f(x) > x$ sur $[-4; 4[$, égalité en 4, puis $f(x) < x$.