

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : géométrie, physique et modélisation

Fonction racine carrée — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules géométriques.

Pythagore: $h = \sqrt{a^2 + b^2}$ distance: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Figure	Relation avec une racine
carré d'aire A	côté $= \sqrt{A}$
carré de côté c	diagonale $= c\sqrt{2}$
triangle équilatéral de côté c	hauteur $= \frac{c\sqrt{3}}{2}$
disque d'aire A	rayon $= \sqrt{\frac{A}{\pi}}$
cube de volume V	diagonale $= \sqrt[3]{V} \times \sqrt{3}$

Modèles physiques classiques.

chute libre: $v = \sqrt{2gh}$ pendule: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ freinage: $d = kv^2$

avec $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$.

Loi de la racine. Dans tous ces modèles, multiplier la grandeur sous la racine par k multiplie le résultat par $\sqrt{k}$ seulement.

Facteur sur x	Facteur sur $\sqrt{x}$
$\times 4$	$\times 2$
$\times 9$	$\times 3$
$\times 100$	$\times 10$

Valeur exacte ou arrondie ? On conserve la **valeur exacte** ($5\sqrt{3}$) tant que les calculs continuent, et l'on n'arrondit qu'à la **fin** — sinon les erreurs s'accumulent.

Contrôles de vraisemblance. Une longueur est positive ; l'hypoténuse est le **plus grand** côté ; la racine d'un nombre entre 0 et 1 est **plus grande** que lui.

Correction de l'exercice 1 - Diagonale d'un pavé

- **Étape 1 — diagonale de la base** : $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$ ✓
- **Étape 2 — grande diagonale** : Pythagore dans le triangle rectangle formé par cette diagonale et la hauteur.

$$D = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

- **Formule directe** : $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$ ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : $13 > 12$, la diagonale dépasse la plus grande arête ✓

- **Encadrement** : $12 < D < 3 + 4 + 12 = 19$ ✓
- **Cas remarquable** : 3-4-12-13 forme un « quadruplet pythagoricien » ✓
- **Volume** : $3 \times 4 \times 12 = 144 \text{ cm}^3$ ✓
- **Aire totale** : $2(12 + 36 + 48) = 192 \text{ cm}^2$ ✓
- **Contrôle** : $2(3 \times 4 + 3 \times 12 + 4 \times 12) = 2 \times 96 = 192$ ✓
- **Cube équivalent en volume** : de côté $\sqrt[3]{144} \approx 5,241 \text{ cm}$, il aurait une diagonale de $5,241\sqrt{3} \approx 9,08 \text{ cm}$ — bien plus **compacte** ✓
- **Leçon** : à volume égal, le cube minimise la diagonale ✓

Réponse. $D = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 2 - Aire et côté

- **Côté** : $c = \sqrt{1800}$.
- **Simplification** : $1800 = 900 \times 2$, donc

$$c = 30\sqrt{2} \approx 42,4264 \text{ m}$$
- **Arrondi au décimètre** : 42,4 m ✓
- **Périmètre** : $4c = 120\sqrt{2} \approx 169,7056 \text{ m}$, soit 169,7 m ✓
- **Vérification** : $42,4264^2 = 1800,0 \text{ m}^2$ ✓
- **Contrôle de l'arrondi** : $42,4^2 = 1797,76 \text{ m}^2$ — soit une erreur de 2,24 m², liée à l'arrondi ✓
- **Diagonale** : $c\sqrt{2} = 30 \times 2 = 60 \text{ m}$ **exactement** ✓
- **Élégance** : la diagonale est un nombre **entier**, alors que le côté ne l'est pas ✓
- **Contrôle** : $\sqrt{2 \times 1800} = \sqrt{3600} = 60$ ✓
- **Encadrement du côté** : $42^2 = 1764$ et $43^2 = 1849$, donc $42 < c < 43$ ✓
- **Intérêt de la valeur exacte** : $30\sqrt{2}$ permet de calculer la diagonale sans erreur, alors que $42,4 \times 1,414 \approx 59,95 \text{ m}$ perdrait de la précision ✓
- **Comparaison** : un terrain rectangulaire de $40 \times 45 \text{ m}$ aurait la même aire (1800 m²) mais un périmètre de 170 m — légèrement **plus grand** ✓

Réponse. Côté $30\sqrt{2} \approx 42,4 \text{ m}$; périmètre $120\sqrt{2} \approx 169,7 \text{ m}$; diagonale exactement 60 m.

Correction de l'exercice 3 - Chute libre

- **Pour** $h = 20 \text{ m}$:

$$v = \sqrt{2 \times 9,81 \times 20} = \sqrt{392,4} \approx 19,8091 \text{ m/s}$$
- **Conversion** : $19,81 \times 3,6 \approx 71,31 \text{ km/h}$ ✓
- **Pour** $v = 30 \text{ m/s}$: $2gh = 900$, donc

$$h = \frac{900}{2 \times 9,81} \approx 45,8716 \text{ m}$$
- **Vérification** : $\sqrt{2 \times 9,81 \times 45,8716} = \sqrt{900} = 30 \text{ m/s}$ ✓
- **Observation** : la vitesse passe de 19,81 à 30 m/s ($\times 1,515$), mais la hauteur de 20 à 45,87 m ($\times 2,294$) ✓
- **Règle** : la hauteur varie comme le **carré** de la vitesse ✓
- **Contrôle** : $1,515^2 = 2,295$ ✓
- **Pour** $h = 80 \text{ m}$ (quatre fois plus) : $v = \sqrt{1569,6} \approx 39,62 \text{ m/s}$ — soit **deux fois plus** ✓
- **Contrôle** : $2 \times 19,81 = 39,62$ ✓

- **Message de sécurité** : une chute de 5 m donne déjà $\sqrt{98,1} \approx 9,90$ m/s, soit 35,6 km/h — équivalent à un choc en voiture en ville ✓
- **Durée de la chute de 20 m** : $t = \frac{v}{g} \approx \frac{19,81}{9,81} \approx 2,019$ s ✓
- **Contrôle** : $h = \frac{gt^2}{2} = \frac{9,81 \times 4,076}{2} \approx 20,0$ m ✓

Réponse. $v \approx 19,81$ m/s pour $h = 20$ m ; $h \approx 45,87$ m pour $v = 30$ m/s.

Correction de l'exercice 4 - Période d'un pendule

- **Pour $L = 1$ m :**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9,81}} \approx 2\pi \times 0,31928 \approx 2,0061 \text{ s}$$

- **Observation remarquable** : un pendule de 1 m a une période d'environ 2 s ✓

- **Pour $T = 2$ s** : $\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$, donc

$$L = \frac{g}{\pi^2} = \frac{9,81}{9,8696} \approx 0,99396 \text{ m}$$

- **Arrondi** : environ 99,4 cm ✓
- **Vérification** : $2\pi\sqrt{\frac{0,99396}{9,81}} = 2\pi \times 0,31831 = 2,0000$ s ✓
- **Contexte historique** : c'est la définition du « pendule battant la seconde », qui a servi de candidat à la définition du **mètre** au XVIII^e siècle ✓
- **Coïncidence numérique** : $g \approx \pi^2$ en unités SI, ce qui explique la quasi-égalité ✓
- **Contrôle** : $\pi^2 \approx 9,8696$ contre $g = 9,81$ — un écart de 0,6 % ✓
- **Pour quadrupler la longueur** : $L = 4$ m donne $T \approx 4,012$ s — soit **deux fois** plus ✓
- **Contrôle** : $2 \times 2,0061 = 4,0122$ ✓
- **Pour doubler la période** : il faut **quadrupler** la longueur ✓
- **Sur la Lune** ($g \approx 1,62$ m/s²) : un pendule de 1 m aurait une période de $2\pi\sqrt{\frac{1}{1,62}} \approx 4,936$ s — presque 2,5 fois plus lent ✓

Réponse. $T \approx 2,006$ s pour $L = 1$ m ; $L \approx 99,4$ cm pour $T = 2$ s.

Correction de l'exercice 5 - Triangle équilatéral

- **Hauteur** — Pythagore dans un demi-triangle de base 5 cm :

$$h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8,6603 \text{ cm}$$

- **Aire** :

$$A = \frac{10 \times 5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3} \approx 43,3013 \text{ cm}^2$$

- **Arrondis** : $h \approx 8,66$ cm et $A \approx 43,30$ cm² ✓
- **Vérification de la hauteur** : $8,6603^2 + 25 = 75,0008 + 25 = 100,0$ ✓
- **Formules générales** : $h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$ et $A = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$ ✓
- **Contrôles** : $\frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ ✓ et $\frac{100\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$ ✓
- **Rapport hauteur/côté** : $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$, **indépendant** du côté ✓

- **Comparaison avec le carré** : un carré de 10 cm de côté aurait une aire de 100 cm², soit plus du **double** ✓
- **Périmètre égal** : un carré de périmètre 30 cm a un côté de 7,5 cm et une aire de 56,25 cm² — encore plus que 43,30 cm² ✓
- **Leçon** : à périmètre égal, le triangle équilatéral est la figure régulière la **moins** efficace ✓
- **Rayon du cercle circonscrit** : $\frac{c}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5,774$ cm ✓
- **Contrôle** : c'est les **deux tiers** de la hauteur, $\frac{2}{3} \times 8,66 = 5,77$ ✓

Réponse. Hauteur $5\sqrt{3} \approx 8,66$ cm et aire $25\sqrt{3} \approx 43,30$ cm².

Correction de l'exercice 6 - Rayon d'un disque

- **Rayon** : $\pi r^2 = 50$, donc
- $$r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx \sqrt{15,9155} \approx 3,9894 \text{ cm}$$
- **Périmètre** : $2\pi r \approx 2\pi \times 3,9894 \approx 25,0663$ cm ✓
 - **Vérification de l'aire** : $\pi \times 3,9894^2 \approx \pi \times 15,9153 \approx 50,00$ cm² ✓
 - **Arrondis** : $r \approx 3,99$ cm et $P \approx 25,07$ cm ✓
 - **Contrôle grossier** : un rayon de 4 cm donnerait une aire de 50,27 cm² — très proche ✓
 - **Relation directe** : $P = 2\sqrt{\pi A} = 2\sqrt{\pi \times 50} = 2\sqrt{157,08} \approx 25,066$ cm ✓
 - **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
 - **Comparaison avec un carré de même aire** : côté $\sqrt{50} \approx 7,071$ cm, périmètre 28,284 cm ✓
 - **Conclusion** : le disque a un périmètre **plus petit** pour la même aire — c'est la propriété **isopérimétrique** ✓
 - **Rapport** : $\frac{25,066}{28,284} \approx 0,886$, soit 11,4 % d'économie ✓
 - **Pour doubler l'aire** : il faut multiplier le rayon par $\sqrt{2}$, soit $r \approx 5,642$ cm ✓
 - **Contrôle** : $\pi \times 31,83 \approx 100,0$ cm² ✓

Réponse. $r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx 3,99$ cm et $P \approx 25,07$ cm.

Correction de l'exercice 7 - Distance dans un repère

- $AB : \sqrt{(3+2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \approx 5,8310$ ✓
- $AC : \sqrt{(1+2)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ ✓
- $BC : \sqrt{(1-3)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53} \approx 7,2801$ ✓
- **Plus grand côté** : $BC = \sqrt{53}$ ✓
- **Simplifications** : $\sqrt{34}$ et $\sqrt{53}$ sont **irréductibles** ($34 = 2 \times 17$ et 53 est premier) ; seul AC donne un entier ✓
- **Triangle rectangle ?** On teste Pythagore avec BC le plus grand.
- $BC^2 = 53$ et $AB^2 + AC^2 = 34 + 25 = 59$.
- **Conclusion** : $53 \neq 59$, le triangle **n'est pas rectangle** ✓
- **Inégalité triangulaire** : $7,28 < 5,83 + 5 = 10,83$ ✓
- **Périmètre** : $5,8310 + 5 + 7,2801 \approx 18,111$ ✓
- **Aire par le déterminant** : avec $\overrightarrow{AB}(5; 3)$ et $\overrightarrow{AC}(3; -4)$,

$$A = \frac{1}{2} |5 \times (-4) - 3 \times 3| = \frac{29}{2} = 14,5$$

- **Contrôle de cohérence** : un triangle de périmètre 18,11 et d'aire 14,5 est plausible ✓
- **Triangle isocèle ?** Les trois longueurs sont distinctes, donc **non** ✓

Réponse. $AB = \sqrt{34}$, $AC = 5$, $BC = \sqrt{53}$ — le plus grand est $BC \approx 7,28$.

Correction de l'exercice 8 - Modèle de croissance

- **À 9 jours** : $t = 8 \times 3 = 24$ cm ✓
- **À 36 jours** : $t = 8 \times 6 = 48$ cm ✓
- **Observation** : le temps est **multiplié par 4**, la taille seulement par 2 ✓
- **Pour 60 cm** : $8\sqrt{j} = 60$, donc $\sqrt{j} = 7,5$ et
 $j = 56,25$ jours
- **Arrondi utile** : 57 jours, pour être sûr d'atteindre 60 cm ✓
- **Vérification** : $8\sqrt{56,25} = 8 \times 7,5 = 60$ cm ✓
- **Contrôle** : $8\sqrt{56} \approx 59,87$ cm et $8\sqrt{57} \approx 60,40$ cm ✓
- **Croissance ralentie** : la plante gagne 24 cm les 9 premiers jours, mais seulement 24 cm de plus en 27 jours ✓
- **Vitesse moyenne sur les 9 premiers jours** : $\frac{24}{9} \approx 2,67$ cm/jour ✓
- **Sur les jours 9 à 36** : $\frac{24}{27} \approx 0,89$ cm/jour — **trois fois** moins ✓
- **Pour atteindre 1 m** : $j = \left(\frac{100}{8}\right)^2 = 156,25$ jours ✓
- **Limite du modèle** : une plante ne croît pas indéfiniment — le modèle en racine est valable sur une **période limitée**, avant saturation ✓

Réponse. 24 cm à 9 jours, 48 cm à 36 jours ; 60 cm atteints après 56,25 jours.

Correction de l'exercice 9 - Optimisation avec racine

- **Hauteur du rectangle** : le sommet $(x; y)$ est sur le cercle, donc $y = \sqrt{25 - x^2}$ ✓
- **Aire** : largeur $2x$, hauteur y .
$$A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2} \quad \text{pour } 0 < x < 5$$
- **Pour $x = 3$** : $A = 6 \times \sqrt{16} = 6 \times 4 = 24$ ✓
- **Pour $x = 4$** : $A = 8 \times \sqrt{9} = 8 \times 3 = 24$ ✓
- **Coïncidence remarquable** : les deux aires sont **égales** ✓
- **Explication** : les couples $(3; 4)$ et $(4; 3)$ sont **échangés**, et le produit $2xy$ est le même ✓
- **Maximum** : il est entre 3 et 4, par symétrie ✓
- **Test en $x = 3,5$** : $A = 7 \times \sqrt{12,75} \approx 7 \times 3,5707 \approx 24,995$ ✓
- **Maximum exact** : atteint quand $x = y$, soit $x = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,5355$, avec $A = 2 \times \frac{25}{2} = 25$ ✓
- **Contrôle** : $2 \times 3,5355 \times 3,5355 = 25,00$ ✓
- **Forme du rectangle optimal** : largeur $2x \approx 7,071$ et hauteur $\approx 3,536$ — **deux fois plus large que haut** ✓
- **Comparaison avec l'aire du demi-disque** : $\frac{\pi \times 25}{2} \approx 39,27$, donc le rectangle en occupe $\frac{25}{39,27} \approx 63,7\%$ ✓

Réponse. $A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}$; elle vaut 24 pour $x = 3$ et pour $x = 4$ (maximum 25 en $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$).

Correction de l'exercice 10 - Temps de chute

— Pour $h = 45$ m :

$$t = \sqrt{\frac{90}{9,81}} = \sqrt{9,1743} \approx 3,0289 \text{ s}$$

— Pour $t = 4$ s : $\frac{2h}{g} = 16$, donc

$$h = \frac{16 \times 9,81}{2} = 78,48 \text{ m}$$

— **Vérification** : $\sqrt{\frac{2 \times 78,48}{9,81}} = \sqrt{16} = 4 \text{ s} \checkmark$

— **Observation** : le temps passe de 3,03 à 4 s ($\times 1,32$), mais la hauteur de 45 à 78,48 m ($\times 1,744$) $\checkmark$

— **Règle** : la hauteur varie comme le **carré** du temps $\checkmark$

— **Contrôle** : $1,32^2 = 1,742 \checkmark$

— **Formule directe** : $h = \frac{gt^2}{2} = 4,905t^2 \checkmark$

— **Contrôles** : $t = 1$ s donne 4,905 m $\checkmark$; $t = 2$ s donne 19,62 m $\checkmark$; $t = 3$ s donne 44,145 m $\checkmark$

— **Cohérence avec la question** : 45 m correspond à un peu plus de 3 s $\checkmark$

— **Vitesse d'impact pour $h = 45$ m** : $v = gt \approx 9,81 \times 3,0289 \approx 29,71$ m/s, soit 107 km/h $\checkmark$

— **Contrôle par l'autre formule** : $\sqrt{2 \times 9,81 \times 45} = \sqrt{882,9} \approx 29,71$ m/s $\checkmark$

— **Ordre de grandeur** : une chute du 5^e étage (environ 15 m) dure 1,75 s et atteint 17,2 m/s, soit 62 km/h $\checkmark$

Réponse. $t \approx 3,03$ s pour $h = 45$ m ; $h = 78,48$ m pour $t = 4$ s.

Correction de l'exercice 11 - Comparaison de deux modèles

— **Croisement** : $50\sqrt{t} = 10t$ donne $5\sqrt{t} = t$, soit $\sqrt{t}(5 - \sqrt{t}) = 0$.

— **Solutions** : $t = 0$ ou $\sqrt{t} = 5$, soit

$$t = 25 \text{ mois}$$

— **Valeur au croisement** : $A(25) = 50 \times 5 = 250$ et $B(25) = 250 \checkmark$

— **Position** : pour $0 < t < 25$, l'entreprise **A** est devant ; pour $t > 25$, c'est **B** $\checkmark$

— **Contrôles** : $t = 4$ donne $A = 100$ contre $B = 40 \checkmark$; $t = 100$ donne $A = 500$ contre $B = 1000 \checkmark$

— **Interprétation** : A démarre très fort mais **ralentit** ; B croît régulièrement et finit par dépasser $\checkmark$

— **Vitesses de croissance** : celle de B est constante à 10 par mois, celle de A **décroît** $\checkmark$

— **Croissance de A entre les mois 1 et 4** : $100 - 50 = 50$, soit 16,7 par mois $\checkmark$

— **Entre les mois 16 et 25** : $250 - 200 = 50$, soit 5,6 par mois $\checkmark$

— **Contrôle** : $A(16) = 50 \times 4 = 200 \checkmark$

— **Écart maximal en faveur de A** : atteint quand les vitesses s'égalisent, vers $t = 6,25$ mois.

— **Contrôle** : $A(6,25) = 125$ contre $B(6,25) = 62,5$, soit un écart de 62,5 $\checkmark$

— **À long terme** : $t = 400$ donne $A = 1000$ contre $B = 4000$ — un facteur 4 ✓

Réponse. A domine jusqu'au mois 25 (où les deux valent 250), puis B l'emporte.

Correction de l'exercice 12 - Problème de tension

— **Isoler** U^2 : $U^2 = PR$, donc

$$U = \sqrt{PR}$$

— **Application** :

$$U = \sqrt{100 \times 25} = \sqrt{2500} = 50 \text{ V}$$

— **Vérification** : $\frac{2500}{25} = 100 \text{ W}$ ✓

— **Contrôle de vraisemblance** : une tension de 50 V est plausible ✓

— **Pour** $P = 400 \text{ W}$ (quatre fois plus) : $U = \sqrt{10\,000} = 100 \text{ V}$ — soit **deux fois** plus ✓

— **Règle** : la tension varie comme la **racine** de la puissance ✓

— **Pour** $R = 100 \, \Omega$ et $P = 100 \text{ W}$: $U = \sqrt{10\,000} = 100 \text{ V}$ ✓

— **Observation** : quadrupler la résistance double aussi la tension, à puissance égale ✓

— **Intensité** : $I = \frac{U}{R} = \frac{50}{25} = 2 \text{ A}$ ✓

— **Contrôle par la puissance** : $P = UI = 50 \times 2 = 100 \text{ W}$ ✓

— **Autre contrôle** : $P = RI^2 = 25 \times 4 = 100 \text{ W}$ ✓

— **Application domestique** : pour $P = 2000 \text{ W}$ sous $U = 230 \text{ V}$, la résistance vaut $\frac{230^2}{2000} = 26,45 \, \Omega$ ✓

— **Contrôle** : $\sqrt{2000 \times 26,45} = \sqrt{52\,900} = 230 \text{ V}$ ✓

Réponse. $U = \sqrt{PR}$, soit $U = 50 \text{ V}$.

Correction de l'exercice 13 - Aire d'un triangle par Héron

— **Demi-périmètre** : $p = \frac{7+8+9}{2} = 12$ ✓

— **Différences** : $p - a = 5$, $p - b = 4$, $p - c = 3$ ✓

— **Aire** :

$$A = \sqrt{12 \times 5 \times 4 \times 3} = \sqrt{720} = 12\sqrt{5} \approx 26,8328$$

— **Simplification** : $720 = 144 \times 5$, d'où $12\sqrt{5}$ ✓

— **Arrondi** : 26,83 ✓

— **Vérification** : $26,8328^2 = 720,0$ ✓

— **Contrôle par la hauteur** : la hauteur relative au côté 9 vaut $\frac{2A}{9} \approx \frac{53,666}{9} \approx 5,963$ ✓

— **Contrôle de vraisemblance** : l'aire est inférieure à celle du rectangle $8 \times 9 = 72$, et supérieure à celle d'un triangle très aplati ✓

— **Comparaison avec l'équilatéral** de même périmètre (24) : côté 8, aire $\frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \approx 27,713$ ✓

— **Conclusion** : notre triangle est presque aussi « efficace » que l'équilatéral ✓

— **Écart** : 3,2 % seulement ✓

— **Triangle rectangle ?** $81 \neq 49 + 64 = 113$, donc **non** ✓

— **Angle le plus grand** : par Al-Kashi, $\cos C = \frac{49 + 64 - 81}{2 \times 56} = \frac{32}{112} \approx 0,2857$, soit environ $73,4^\circ$ ✓

Réponse. $A = \sqrt{720} = 12\sqrt{5} \approx 26,83$.

Correction de l'exercice 14 - Vitesse orbitale

— **Calcul du quotient :**

$$\frac{3,986 \times 10^{14}}{7 \times 10^6} \approx 5,694 \times 10^7$$

— **Vitesse :**

$$v = \sqrt{5,694 \times 10^7} \approx 7546 \text{ m/s}$$

— **Conversion :** environ 7,55 km/s, soit 27 166 km/h ✓

— **Contrôle de vraisemblance :** c'est bien l'ordre de grandeur d'un satellite en orbite basse ✓

— **Altitude correspondante :** $7 \times 10^6 - 6,371 \times 10^6 \approx 629 \text{ km}$ ✓

— **Pour r quadruplé ($2,8 \times 10^7 \text{ m}$) :** $v = \sqrt{1,4236 \times 10^7} \approx 3773 \text{ m/s}$ — soit la **moitié** ✓

— **Règle :** la vitesse varie comme $\frac{1}{\sqrt{r}}$ ✓

— **Contrôle :** $\frac{7546}{2} = 3773$ ✓

— **Orbite géostationnaire** ($r \approx 4,22 \times 10^7 \text{ m}$) : $v = \sqrt{9,445 \times 10^6} \approx 3073 \text{ m/s}$ ✓

— **Période :** $T = \frac{2\pi r}{v} \approx \frac{2,652 \times 10^8}{3073} \approx 86\,300 \text{ s}$, soit environ 23 h 58 min ✓

— **Cohérence :** c'est bien un jour sidéral ✓

— **Contrôle pour l'orbite basse :** $T = \frac{2\pi \times 7 \times 10^6}{7546} \approx 5829 \text{ s}$, soit 1 h 37 min ✓

— **Leçon :** plus l'orbite est haute, plus le satellite est **lent** — contre-intuitif mais essentiel en astronautique ✓

Réponse. $v \approx 7546 \text{ m/s}$, soit environ 7,55 km/s.

Correction de l'exercice 15 - Problème d'échelle

— **Aire initiale :** 100 cm^2 ; **aire finale :** 300 cm^2 ✓

— **Nouveau côté :**

$$c = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \approx 17,3205 \text{ cm}$$

— **Coefficient d'agrandissement :** $\frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3} \approx 1,7321$ ✓

— **Vérification :** $(10\sqrt{3})^2 = 300 \text{ cm}^2$ ✓

— **Règle fondamentale :** pour multiplier une **aire** par k , on multiplie les **longueurs** par $\sqrt{k}$ ✓

— **Contrôles :** pour doubler l'aire, coefficient $\sqrt{2} \approx 1,414$ ✓ ; pour quadrupler, coefficient 2 ✓

— **Erreur classique :** tripler le côté, ce qui multiplierait l'aire par 9 ✓

— **Vérification :** $30^2 = 900 = 9 \times 100$ ✓

— **Périmètre :** il est multiplié par $\sqrt{3}$ aussi, passant de 40 à $40\sqrt{3} \approx 69,28 \text{ cm}$ ✓

— **Extension aux volumes :** pour multiplier un **volume** par k , on multiplie les longueurs par $\sqrt[3]{k}$ ✓

— **Contrôle :** pour tripler un volume, coefficient $\sqrt[3]{3} \approx 1,442$ ✓

- **Application pratique** : une photo « deux fois plus grande » est ambiguë — deux fois plus large (aire $\times 4$) ou deux fois plus de surface (côté $\times 1,414$) ? ✓
- **Format papier** : passer d'une A4 à une A3 double l'aire, d'où un coefficient de $\sqrt{2}$ sur les côtés ✓

Réponse. Côté $10\sqrt{3} \approx 17,32$ cm ; coefficient d'agrandissement $\sqrt{3} \approx 1,73$.

Correction de l'exercice 16 - Racine et moyenne

- **Premier couple** : moyenne arithmétique $\frac{4+16}{2} = 10$; moyenne géométrique $\sqrt{64} = 8$ ✓
- **Comparaison** : $8 < 10$ ✓
- **Second couple** : moyenne arithmétique 9 ; moyenne géométrique $\sqrt{81} = 9$ ✓
- **Comparaison** : égalité ✓
- **Inégalité générale** : pour $a, b \geq 0$,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$
- **Cas d'égalité** : $a = b$ ✓
- **Démonstration** : $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$ ✓
- **Contrôle du premier couple** : $\frac{(2-4)^2}{2} = 2$, et $10 - 8 = 2$ ✓
- **Interprétation géométrique** : la moyenne géométrique de a et b est le côté du **carré** de même aire que le rectangle $a \times b$ ✓
- **Contrôle** : un rectangle 4×16 a une aire de 64, comme un carré de côté 8 ✓
- **Interprétation du périmètre** : celui du carré (32) est **inférieur** à celui du rectangle (40) ✓
- **Cohérence avec la propriété isopérimétrique** : à aire égale, le carré minimise le périmètre ✓
- **Autre exemple** : $a = 1$ et $b = 100$ donnent 10 contre 50,5 — un écart énorme quand les nombres sont très différents ✓

Réponse. $8 < 10$ pour le premier couple, égalité (9) pour le second : $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Correction de l'exercice 17 - Synthèse : problème complet

- a) **Côté** : $c = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14,1421$ m ✓
- **Allée (diagonale)** : $d = c\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 20$ m **exactement** ✓
 - **Élégance** : la diagonale est un entier ✓
 - **Contrôle** : $d = \sqrt{2 \times 200} = \sqrt{400} = 20$ m ✓
- b) **Clôture** : $4c = 40\sqrt{2} \approx 56,5685$ m.
- **Coût de la clôture** : $56,5685 \times 18 \approx 1018,23$ € ✓
 - **Coût de l'allée** : $20 \times 45 = 900$ € ✓
 - **Coût total** :

$$1018,23 + 900 = 1918,23 \text{ €}$$
- c) **Généralisation.** Pour une aire A , on a $c = \sqrt{A}$ et $d = \sqrt{2A}$.
- **Coût** : $C(A) = 18 \times 4\sqrt{A} + 45\sqrt{2A} = 72\sqrt{A} + 45\sqrt{2}\sqrt{A}$.
 - **Factorisation** :

$$C(A) = (72 + 45\sqrt{2})\sqrt{A} \approx 135,6396\sqrt{A}$$

— **Contrôle pour** $A = 200$: $135,6396 \times 14,1421 \approx 1918,23$ € ✓

— **Équation** : $135,6396\sqrt{A} = 10\,000$, donc $\sqrt{A} \approx 73,7247$ et

$$A \approx 5435,3 \text{ m}^2$$

— **Vérification** : le côté vaudrait 73,72 m, la clôture 294,90 m (5308,18 €) et l'allée 104,26 m (4691,81 €), pour un total de 9999,99 € ✓

— **Observation** : multiplier le budget par 5,21 permet de multiplier l'aire par 27,2 ✓

— **Contrôle** : $5,21^2 = 27,1$ ✓

— **Règle économique** : le coût croît comme $\sqrt{A}$, donc **doubler le budget quadruple l'aire** clôturable ✓

— **Contrôle** : avec 3836,46 € (le double), on obtiendrait 800 m², soit 4 fois plus ✓

Réponse. a) côté $10\sqrt{2} \approx 14,14$ m et allée 20 m · b) $\approx 1918,23$ € · c) environ 5435 m².