Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : géométrie, physique et modélisation

Fonction racine carrée — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules géométriques.

$$\text{Pythagore : } h = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{distance : } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Figure	Relation avec une racine
carré d'aire A	côté $= \sqrt{A}$
carré de côté c	diagonale $= c\sqrt{2}$
triangle équilatéral de côté c	hauteur $= \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$
disque d'aire A	rayon $= \sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$
cube de volume V	diagonale $= \sqrt[3]{V} \times \sqrt{3}$

Modèles physiques classiques.

$$\text{chute libre : } v = \sqrt{2gh} \qquad \text{pendule : } T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{freinage : } d = kv^2$$

avec $g \approx 9{,}81$ m/s².

Loi de la racine. Dans tous ces modèles, multiplier la grandeur sous la racine par k multiplie le résultat par $\sqrt{k}$ seulement.

Facteur sur x	Facteur sur $\sqrt{x}$
×4	×2
×9	×3
×100	×10

Valeur exacte ou arrondie ? On conserve la **valeur exacte** ($5\sqrt{3}$) tant que les calculs continuent, et l'on n'arrondit qu'à la **fin** — sinon les erreurs s'accumulent.

Contrôles de vraisemblance. Une longueur est positive ; l'hypoténuse est le **plus grand** côté ; la racine d'un nombre entre 0 et 1 est **plus grande** que lui.

Correction de l'exercice 1 – Diagonale d'un pavé

On applique deux fois le théorème de Pythagore. La diagonale de la base, rectangle de 3 cm sur 4 cm, vaut $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ cm. Elle forme avec une arête verticale de 12 cm un triangle rectangle dont l'hypoténuse est la grande diagonale :

$$D = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

On retient la formule directe $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$ cm.

Contrôle de vraisemblance : la diagonale dépasse la plus grande arête (12 cm) et reste inférieure à la somme des trois (19 cm).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $D = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$ cm.

Correction de l’exercice 2 – Aire et côté

Le côté c vérifie $c^2 = 1\,800$, avec $c > 0$:

$$c = \sqrt{1\,800} = \sqrt{900 \times 2} = 30\sqrt{2} \approx 42{,}4 \text{ m}$$

Le périmètre vaut $4c = 120\sqrt{2} \approx 169{,}7$ m. La diagonale, elle, vaut $c\sqrt{2} = 30 \times 2 = 60$ m **exactement**.

Contrôle : $42^2 = 1\,764$ et $43^2 = 1\,849$, donc le côté est entre 42 et 43 m. Garder la valeur exacte $30\sqrt{2}$ permet d’obtenir la diagonale sans erreur d’arrondi ; avec $42{,}4 \times 1{,}414$, on trouverait 59,95 m.

Réponse. Côté $30\sqrt{2} \approx 42{,}4$ m ; périmètre $120\sqrt{2} \approx 169{,}7$ m ; diagonale exactement 60 m.

Correction de l’exercice 3 – Chute libre

Pour $h = 20$ m, on remplace dans la formule :

$$v = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 20} = \sqrt{392{,}4} \approx 19{,}8 \text{ m/s}$$

soit environ 71 km/h. Pour $v = 30$ m/s, on élève au carré (les deux membres sont positifs) : $2gh = 900$, donc $h = \dfrac{900}{2 \times 9{,}81} \approx 45{,}9$ m.

La vitesse est multipliée par environ 1,5, la hauteur par environ 2,3 : la hauteur varie comme le **carré** de la vitesse. **Contrôle** : tomber de 80 m, quatre fois plus haut que 20 m, donne $v = \sqrt{1\,569{,}6} \approx 39{,}6$ m/s, deux fois plus vite.

Réponse. $v \approx 19{,}81$ m/s pour $h = 20$ m ; $h \approx 45{,}87$ m pour $v = 30$ m/s.

Correction de l’exercice 4 – Période d’un pendule

Pour $L = 1$ m :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}81}} \approx 2\pi \times 0{,}319\,3 \approx 2{,}006 \text{ s}$$

Pour $T = 2$ s, on isole la racine, puis on élève au carré : $\sqrt{\dfrac{L}{g}} = \dfrac{2}{2\pi} = \dfrac{1}{\pi}$, donc $\dfrac{L}{g} = \dfrac{1}{\pi^2}$ et $L = \dfrac{g}{\pi^2} = \dfrac{9{,}81}{9{,}87} \approx 0{,}994$ m, soit environ 99,4 cm.

Vérification : $2\pi\sqrt{\dfrac{0{,}994}{9{,}81}} \approx 2{,}000$ s. Un pendule d’environ un mètre « bat la seconde » ; pour doubler la période, il faut quadrupler la longueur.

Réponse. $T \approx 2{,}006$ s pour $L = 1$ m ; $L \approx 99{,}4$ cm pour $T = 2$ s.

Correction de l’exercice 5 – Triangle équilatéral

La hauteur partage le triangle en deux triangles rectangles d’hypoténuse 10 cm et de base 5 cm. Le théorème de Pythagore donne

$$h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66 \text{ cm}$$

L’aire vaut $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{10 \times 5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3} \approx 43{,}30$ cm².

Plus généralement, pour un côté c : $h = \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$ et $A = \dfrac{c^2\sqrt{3}}{4}$. **Contrôle** :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$8{,}66^2 + 5^2 \approx 75 + 25 = 100$.

Réponse. Hauteur $5\sqrt{3} \approx 8{,}66$ cm et aire $25\sqrt{3} \approx 43{,}30$ cm².

Correction de l'exercice 6 – Rayon d'un disque

On isole r^2 dans la formule de l'aire, puis on prend la racine (le rayon est positif) :

$$\pi r^2 = 50 \Leftrightarrow r^2 = \frac{50}{\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx 3{,}99 \text{ cm}$$

Le périmètre vaut $2\pi r \approx 2\pi \times 3{,}989 \approx 25{,}07$ cm.

Contrôle grossier : un rayon de 4 cm donnerait une aire de $\pi \times 16 \approx 50{,}3$ cm², très proche de 50. Un carré de même aire aurait un côté $\sqrt{50} \approx 7{,}07$ cm et un périmètre de 28,3 cm : à aire égale, le disque a le plus petit pourtour.

Réponse. $r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx 3{,}99$ cm et $P \approx 25{,}07$ cm.

Correction de l'exercice 7 – Distance dans un repère

On applique la formule de distance à chaque côté :

$$AB = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \qquad AC = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \qquad BC = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{53}$$

Le plus grand côté est $[BC]$, avec $\sqrt{53} \approx 7{,}28$; $\sqrt{34} \approx 5{,}83$ et $\sqrt{53}$ ne se simplifient pas.

Pour savoir si le triangle est rectangle, on compare : $BC^2 = 53$ et $AB^2 + AC^2 = 34 + 25 = 59$. Comme $53 \neq 59$, il n'est pas rectangle. Les trois longueurs étant différentes, il n'est pas isocèle. Son périmètre vaut environ $5{,}83 + 5 + 7{,}28 \approx 18{,}11$.

Réponse. $AB = \sqrt{34}$, $AC = 5$, $BC = \sqrt{53}$ — le plus grand est $BC \approx 7{,}28$.

Correction de l'exercice 8 – Modèle de croissance

On remplace j par 9, puis par 36 : $t(9) = 8 \times 3 = 24$ cm et $t(36) = 8 \times 6 = 48$ cm. Le temps est multiplié par 4, la taille seulement par 2.

Pour 60 cm, on isole la racine, puis on élève au carré :

$$8\sqrt{j} = 60 \Leftrightarrow \sqrt{j} = 7{,}5 \Leftrightarrow j = 56{,}25$$

La plante atteint 60 cm au cours du 57e jour. **Vérification** : $8\sqrt{56{,}25} = 8 \times 7{,}5 = 60$.

La croissance ralentit : 24 cm gagnés les 9 premiers jours, puis 24 cm en 27 jours. Le modèle ne vaut que sur une période limitée, une plante ne grandissant pas indéfiniment.

Réponse. 24 cm à 9 jours, 48 cm à 36 jours ; 60 cm atteints après 56,25 jours.

Correction de l'exercice 9 – Optimisation avec racine

Le sommet supérieur droit du rectangle, $(x\,;y)$, est sur le demi-cercle de centre O et de rayon 5 : $x^2 + y^2 = 25$, donc $y = \sqrt{25 - x^2}$. Le rectangle a pour largeur $2x$ et pour hauteur y :

$$A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2} \qquad \text{pour } 0 < x < 5$$

Pour $x = 3$: $A = 6 \times \sqrt{16} = 24$. Pour $x = 4$: $A = 8 \times \sqrt{9} = 24$.

Les deux aires sont égales : les couples $(3\,;4)$ et $(4\,;3)$ sont échangés, et le produit $2xy$ ne change pas. **Contrôle** avec $x = 3{,}5$: $A = 7\sqrt{12{,}75} \approx 25{,}0$, un peu plus : l'aire semble maximale entre 3 et 4.

Réponse. $A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}$; elle vaut 24 pour $x = 3$ **et** pour $x = 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 10 – Temps de chute

Pour $h = 45$ m :

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 45}{9{,}81}} = \sqrt{9{,}17} \approx 3{,}03 \text{ s}$$

Pour $t = 4$ s, on élève au carré : $\frac{2h}{9{,}81} = 16$, donc $h = \frac{16 \times 9{,}81}{2} = 78{,}48$ m.

On peut retenir la formule réciproque $h = \frac{gt^2}{2} = 4{,}905\,t^2$: la hauteur varie comme le carré du temps. **Contrôle** : $t = 3$ s donne 44,1 m, un peu moins que 45 m, cohérent avec $t \approx 3{,}03$ s.

Réponse. $t \approx 3{,}03$ s pour $h = 45$ m ; $h = 78{,}48$ m pour $t = 4$ s.

Correction de l’exercice 11 – Comparaison de deux modèles

Les deux chiffres d’affaires sont égaux quand $50\sqrt{t} = 10t$. On factorise par $\sqrt{t}$, en écrivant $t = \sqrt{t} \times \sqrt{t}$:

$$50\sqrt{t} - 10t = 10\sqrt{t}\left(5 - \sqrt{t}\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } \sqrt{t} = 5$$

Les courbes se croisent en $t = 25$ mois, où les deux valent 250 milliers d’euros. Le signe de $5 - \sqrt{t}$ montre que A est devant pour $0 < t < 25$, B ensuite.

Contrôle : $t = 4$ donne 100 contre 40 ; $t = 100$ donne 500 contre 1 000. A démarre vite puis ralentit (de 50 en 9 mois entre les mois 16 et 25), B progresse de 10 chaque mois et finit par la dépasser.

Réponse. A domine jusqu’au mois 25 (où les deux valent 250), puis B l’emporte.

Correction de l’exercice 12 – Problème de tension

On isole U^2, puis on prend la racine, la tension étant positive :

$$P = \frac{U^2}{R} \Leftrightarrow U^2 = PR \Leftrightarrow U = \sqrt{PR}$$

Pour $P = 100$ W et $R = 25\ \Omega$: $U = \sqrt{2\,500} = 50$ V.

Vérification : $\frac{50^2}{25} = 100$ W. L’intensité vaut $I = \frac{U}{R} = 2$ A, et $UI = 100$ W. Quadrupler la puissance à résistance égale ne fait que doubler la tension : $\sqrt{400 \times 25} = 100$ V.

Réponse. $U = \sqrt{PR}$, soit $U = 50$ V.

Correction de l’exercice 13 – Aire d’un triangle par Héron

On calcule le demi-périmètre, puis on applique la formule donnée :

$$p = \frac{7 + 8 + 9}{2} = 12 \qquad A = \sqrt{12 \times 5 \times 4 \times 3} = \sqrt{720}$$

On simplifie : $720 = 144 \times 5$, donc $A = 12\sqrt{5} \approx 26{,}83$.

Contrôle de vraisemblance : l’aire est inférieure à la moitié du rectangle 8×9 (36), et proche de celle du triangle équilatéral de même périmètre, de côté 8 : $\frac{64\sqrt{3}}{4} \approx 27{,}7$. Le triangle n’est pas rectangle, car $9^2 = 81 \neq 7^2 + 8^2 = 113$.

Réponse. $A = \sqrt{720} = 12\sqrt{5} \approx 26{,}83$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – Vitesse orbitale

On calcule d’abord le quotient sous la racine, en écriture scientifique :

$$\frac{3{,}986 \times 10^{14}}{7 \times 10^{6}} \approx 0{,}569\,4 \times 10^{8} = 5{,}694 \times 10^{7}$$

puis $v = \sqrt{5{,}694 \times 10^{7}} \approx 7\,546$ m/s, soit environ 7,55 km/s ou 27 000 km/h.

C’est bien la vitesse d’un satellite en orbite basse (environ 630 km d’altitude, le rayon terrestre valant 6 371 km). La vitesse varie comme l’inverse de $\sqrt{r}$: à une distance quatre fois plus grande, le satellite va deux fois moins vite, environ 3 773 m/s.

Réponse. $v \approx 7546$ m/s, soit environ 7,55 km/s.

Correction de l’exercice 15 – Problème d’échelle

L’aire passe de 100 cm² à 300 cm². Le nouveau côté est la racine de la nouvelle aire :

$$c = \sqrt{300} = \sqrt{100 \times 3} = 10\sqrt{3} \approx 17{,}32 \text{ cm}$$

Le coefficient d’agrandissement des longueurs vaut $\dfrac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$.

Pour multiplier une aire par k, on multiplie les longueurs par $\sqrt{k}$. Tripler le côté serait une erreur : l’aire serait multipliée par 9 ($30^2 = 900$). Le passage d’une feuille A4 à une feuille A3, d’aire double, multiplie de même les côtés par $\sqrt{2}$.

Réponse. Côté $10\sqrt{3} \approx 17{,}32$ cm ; coefficient d’agrandissement $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

Correction de l’exercice 16 – Racine et moyenne

On calcule les deux moyennes. Pour 4 et 16 : $\dfrac{4+16}{2} = 10$ et $\sqrt{4 \times 16} = \sqrt{64} = 8$, donc $8 < 10$. Pour 9 et 9 : les deux valent 9.

Cette inégalité est générale. Pour $a, b \geq 0$, on étudie le signe de la différence, en reconnaissant une identité remarquable :

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $a = b$. Géométriquement, $\sqrt{ab}$ est le côté du carré de même aire que le rectangle $a \times b$: un rectangle 4×16 et un carré de côté 8 ont tous deux une aire de 64.

Réponse. $8 < 10$ pour le premier couple, égalité (9) pour le second : $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Correction de l’exercice 17 – Synthèse : problème complet

a) Le côté vaut $c = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ m, et l’allée, diagonale du carré, $d = c\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 20$ m exactement.

b) La clôture mesure $4c = 40\sqrt{2} \approx 56{,}57$ m et coûte $56{,}57 \times 18 \approx 1\,018{,}23$ € ; l’allée coûte $20 \times 45 = 900$ €. Le coût total est d’environ 1 918,23 €.

c) Pour une aire A, le côté vaut $\sqrt{A}$ et la diagonale $\sqrt{2} \times \sqrt{A}$: le coût s’écrit

$$C = 72\sqrt{A} + 45\sqrt{2}\sqrt{A} = \left(72 + 45\sqrt{2}\right)\sqrt{A} \approx 135{,}64\sqrt{A}$$

On résout $135{,}64\sqrt{A} = 10\,000$: $\sqrt{A} \approx 73{,}72$, donc $A \approx 5\,435$ m². Le coût est proportionnel à $\sqrt{A}$: doubler le budget permet de quadrupler l’aire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) côté $10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ m et allée 20 m · b) $\approx 1918{,}23$ € · c) environ 5435 m².

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).