MATHÉMATIQUES

Fonction racine carrée

Seconde

Racine carrée • Courbe • Variations • $\sqrt{a^2} = |a|$
$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ • Simplifications • Équations $\sqrt{x} = k$ • Comparaisons

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques de seconde générale et technologique** (arrêté du 26 février 2026, BO n°14 du 2 avril 2026, rentrée 2026). Il réunit :

- la fonction racine carrée comme fonction de référence : définition, courbe, variations, résolution de $f(x) = k$ et $f(x) < k$ (partie « Fonctions ») ;
- les règles de calcul sur les racines carrées et la relation $\sqrt{a^2} = |a|$ (partie « Algèbre ») ;
- la **démonstration** au programme : pour a et b positifs, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$;
- en approfondissement, le lien entre les courbes de la fonction carré et de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$.

Objectif : connaître la fonction racine carrée, calculer avec des racines carrées et résoudre $\sqrt{x} = k$, $\sqrt{x} < k$.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Racine carrée d'un nombre positif **3**

2 La fonction racine carrée **3**

2.1 Définition et courbe 3

2.2 Signe et variations 3

2.3 Équations et inéquations 4

3 Calculer avec des racines carrées **5**

3.1 Les deux relations fondamentales 5

3.2 Produit et quotient 5

3.3 Simplifier une racine carrée 5

3.4 Supprimer une racine au dénominateur 6

3.5 Développer avec des racines 6

4 Carré et racine carrée : deux courbes liées **6**

5 Méthodes et erreurs classiques **7**

6 Fiche de synthèse **7**

7 Exercices d'application **7**

8 Corrigés des exercices **8**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Racine carrée d'un nombre positif

Racine carrée

Soit a un réel positif ou nul. La **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre **positif ou nul** dont le carré est égal à a :

$$y = \sqrt{a} \iff y \geq 0 \text{ et } y^2 = a.$$

Valeurs à connaître

a	0	1	4	9	16	25	36	49	64	100
$\sqrt{a}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10

Valeurs approchées : $\sqrt{2} \approx 1{,}414$; $\sqrt{3} \approx 1{,}732$; $\sqrt{5} \approx 2{,}236$.

Une racine carrée n'est jamais négative

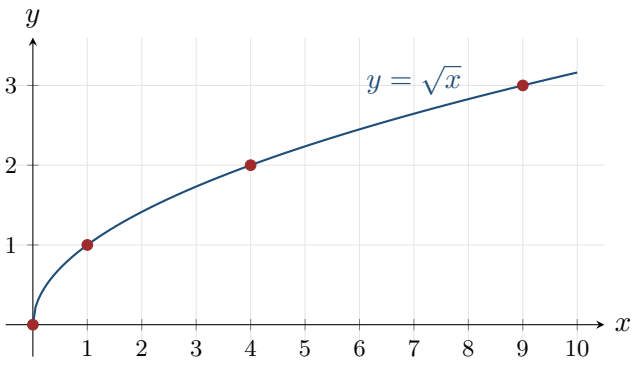
$\sqrt{9} = 3$ et non « ± 3 ». Les deux nombres -3 et 3 ont pour carré 9, mais seul le positif est *la* racine carrée. Et $\sqrt{-9}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$: aucun réel n'a un carré négatif.

2. La fonction racine carrée

2.1. Définition et courbe

Fonction racine carrée

La fonction **racine carrée** est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.



La courbe passe par $(0\,;0)$, $(1\,;1)$, $(4\,;2)$ et $(9\,;3)$; elle monte de moins en moins vite.

2.2. Signe et variations

Signe

Pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$, et $\sqrt{x} = 0 \iff x = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Variations de la fonction racine carrée

La fonction racine carrée est **strictement croissante** sur $[0\,;+\infty[$: pour $0 \leq a < b$, on a $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗

Démonstration. Soit $0 \leq a < b$. Alors $b > 0$, donc $\sqrt{b} > 0$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$. On écrit

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}.$$

Le numérateur $b - a$ est strictement positif, le dénominateur aussi : $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$.

Comparer deux racines carrées

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées : $\sqrt{7} < \sqrt{7{,}1}$ car $7 < 7{,}1$. Pour comparer 3 et $\sqrt{10}$, on écrit $3 = \sqrt{9}$ et $9 < 10$, donc $3 < \sqrt{10}$.

2.3. Équations et inéquations

Résoudre $\sqrt{x} = k$ et $\sqrt{x} < k$

Soit k un réel.

- Si $k \geq 0$: $\sqrt{x} = k \iff x = k^2$. Si $k < 0$: aucune solution.
- Si $k > 0$: $\sqrt{x} < k \iff 0 \leq x < k^2$ et $\sqrt{x} > k \iff x > k^2$.

Graphiquement, on lit les abscisses des points de la courbe sur (ou sous, ou au-dessus de) la droite $y = k$.

Résolutions

- $\sqrt{x} = 6 \iff x = 36$; $\sqrt{x} = -2$ n'a pas de solution.
- $\sqrt{x} \leq 3 \iff x \in [0\,;9]$; $\sqrt{x} > 1{,}5 \iff x > 2{,}25$.
- $\sqrt{2x+1} = 3$: il faut $2x + 1 \geq 0$; alors $2x + 1 = 9$, d'où $x = 4$. Vérification : $\sqrt{9} = 3$.

Oublier l'ensemble de définition

$\sqrt{x} < 3$ ne donne pas $x < 9$: le nombre -1 vérifie $-1 < 9$ mais $\sqrt{-1}$ n'existe pas. La solution est $[0\,;9[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Calculer avec des racines carrées

3.1. Les deux relations fondamentales

Carré d'une racine, racine d'un carré

— Pour tout $a \geq 0$: $(\sqrt{a})^2 = a$.
— Pour tout réel a : $\sqrt{a^2} = |a|$.

Pourquoi la valeur absolue ?

$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$, mais $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$, et non -5. La racine carrée renvoie toujours un nombre positif : celui qui est à la même distance de 0 que a.

3.2. Produit et quotient

Racine d'un produit, d'un quotient

Pour tous réels $a \geq 0$ et $b \geq 0$:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, \qquad \text{et si } b > 0, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Démonstration au programme. Les nombres $\sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{ab}$ sont tous deux positifs. Or

$$\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab.$$

Donc $\sqrt{a}\sqrt{b}$ est un nombre positif dont le carré vaut ab : par définition, c'est $\sqrt{ab}$.

Pas de règle pour la somme

En général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$. De même, $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

3.3. Simplifier une racine carrée

Écrire $\sqrt{n}$ sous la forme $a\sqrt{b}$

1. Chercher le **plus grand carré parfait** qui divise n : 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100…
2. Écrire $n = p^2 \times b$, puis $\sqrt{n} = \sqrt{p^2}\sqrt{b} = p\sqrt{b}$.

Simplifications et sommes

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2} \qquad \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2} \qquad \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$$

On peut alors réduire une somme : $\sqrt{72} - \sqrt{50} + \sqrt{8} = 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3.4. Supprimer une racine au dénominateur

Rendre un dénominateur entier

On multiplie le numérateur et le dénominateur par la racine :

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Avec une somme ou une différence, l'identité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ fait disparaître la racine :

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

3.5. Développer avec des racines

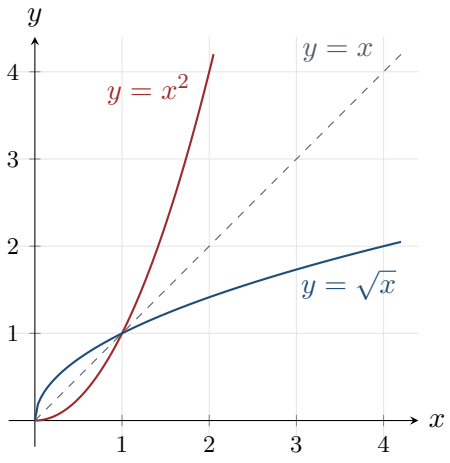
Identités remarquables

- $(1+\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$;
- $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) = 5 - 4 = 1$;
- $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$ (et non 6).

4. Carré et racine carrée : deux courbes liées

Courbes symétriques par rapport à la droite $y = x$

Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$: $b = \sqrt{a} \iff a = b^2$. Le point $(a\,;b)$ est sur la courbe de la racine carrée si et seulement si le point $(b\,;a)$ est sur la parabole $y = x^2$. Sur $[0\,;+\infty[$, les deux courbes sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Comparer x, x^2 et $\sqrt{x}$

Pour $0 < x < 1$: $x^2 < x < \sqrt{x}$ (par exemple $0{,}25 < 0{,}5 < 0{,}707\ldots$). Pour $x > 1$: $\sqrt{x} < x < x^2$ (par exemple $2 < 4 < 16$ pour $x = 4$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

5. Méthodes et erreurs classiques

Quelle propriété utiliser ?

Situation	Outil
comparer $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$	la fonction est croissante : comparer a et b
comparer $\sqrt{a}$ et un entier n	écrire $n = \sqrt{n^2}$
simplifier $\sqrt{n}$	plus grand carré parfait diviseur de n
racine au dénominateur	multiplier par la racine, ou par l'expression conjuguée
$\sqrt{x} = k$	$k \geq 0$ puis $x = k^2$; vérifier
$\sqrt{(\ldots)^2}$	valeur absolue

Erreurs classiques

- $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$: faux.
- $\sqrt{x^2} = x$ pour tout x : faux si $x < 0$.
- $(3\sqrt{2})^2 = 3 \times 2$: faux, c'est $9 \times 2 = 18$.
- Résoudre $\sqrt{x} = -4$ en écrivant $x = 16$: $\sqrt{16} = 4 \neq -4$.
- Oublier que $\sqrt{x}$ n'est défini que pour $x \geq 0$.

6. Fiche de synthèse

Définition	$\sqrt{a}$ $(a \geq 0)$: le nombre positif dont le carré vaut a
Fonction	définie sur $[0\,;+\infty[$, strictement croissante, $\sqrt{x} \geq 0$
Équation	$\sqrt{x} = k \iff x = k^2$ si $k \geq 0$; aucune solution si $k < 0$
Inéquation	$\sqrt{x} < k \iff 0 \leq x < k^2$ $(k > 0)$
Relations	$(\sqrt{a})^2 = a$; $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$
Produit, quotient	$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
Somme	aucune règle : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
Lien avec le carré	courbes symétriques par rapport à $y = x$ sur $[0\,;+\infty[$

7. Exercices d'application

Exercice 1 – Simplifier

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b entier le plus petit possible : $\sqrt{48}$, $\sqrt{200}$, $\sqrt{12} + \sqrt{27}$, $\sqrt{98} - 2\sqrt{8}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 2 – Développer et rendre entier un dénominateur

a) Développer $(2-\sqrt{3})^2$ et $(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})$.

b) Écrire sans racine au dénominateur : $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$.

Exercice 3 – Comparer

Ranger dans l'ordre croissant, sans calculatrice : 4 ; $\sqrt{15}$; $\sqrt{17}$; $2\sqrt{3}$.

Exercice 4 – Équations et inéquations

Résoudre : a) $\sqrt{x}=2{,}5$; b) $\sqrt{x}\leq 4$; c) $\sqrt{x-3}=5$; d) $\sqrt{x}=-1$; e) $\sqrt{(x-2)^2}=3$.

Exercice 5 – Diagonale d'un carré

Un carré a pour aire A (en cm^2). Exprimer son côté c puis sa diagonale d en fonction de A. Calculer d pour $A=50$, en valeur exacte simplifiée.

8. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $\sqrt{48}=\sqrt{16\times 3}=4\sqrt{3}$; $\sqrt{200}=\sqrt{100\times 2}=10\sqrt{2}$; $\sqrt{12}+\sqrt{27}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$; $\sqrt{98}-2\sqrt{8}=7\sqrt{2}-2\times 2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. a) $(2-\sqrt{3})^2=4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}$; $(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})=7-2=5$.

b) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$; $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. On écrit tout sous la forme d'une racine : $4=\sqrt{16}$ et $2\sqrt{3}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{12}$. Comme $12<15<16<17$ et que la fonction racine carrée est croissante : $2\sqrt{3}<\sqrt{15}<4<\sqrt{17}$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. a) $x=2{,}5^2=6{,}25$. b) $x\in[0\,;16]$. c) Il faut $x-3\geq 0$; $x-3=25$, d'où $x=28$ (vérification : $\sqrt{25}=5$). d) Aucune solution : une racine carrée est positive. e) $\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=3 \iff x=-1$ ou $x=5$.

Corrigé de l'exercice 5

Corrigé. $c^2=A$ et $c>0$, donc $c=\sqrt{A}$. Par Pythagore dans un demi-carré, $d^2=c^2+c^2=2A$, donc $d=\sqrt{2A}$. Pour $A=50$: $d=\sqrt{100}=10$ cm, et $c=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ cm. Contrôle : $d=c\sqrt{2}=5\sqrt{2}\times\sqrt{2}=10$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).