

Plaquette 1 - Bases des fonctions affines

Fonctions affines — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Fonctions affines : définition et premières propriétés.

- **Définition.** Une fonction f est **affine** s'il existe deux réels m et p tels que, pour tout réel x ,

$$f(x) = mx + p$$

m est le **coefficient directeur**, p l'**ordonnée à l'origine**.

- **Deux cas particuliers.**

$$p = 0: f(x) = mx \quad m = 0: f(x) = p$$

Dans le premier cas la fonction est **linéaire** et traduit une **proportionnalité** ; dans le second elle est **constante** et ne varie pas.

- **Lecture des deux coefficients.** $p = f(0)$ se lit directement. Et m mesure la variation de $f(x)$ quand x augmente de 1 :

$$f(x+1) - f(x) = m$$

- **Taux de variation.** Pour deux réels distincts a et b , le quotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$$

est **constant**, égal au coefficient directeur. C'est la propriété caractéristique des fonctions affines.

- **Accroissements constants.** Dans un tableau de valeurs à pas régulier, les différences de la ligne du bas sont **toutes égales** si la fonction est affine. C'est le test à faire.
- **△ Développer avant de conclure.** $f(x) = (x+2)(x-3)$ n'est pas affine (il reste un x^2), mais $g(x) = (x+2) + (x-3)$ l'est, et $h(x) = (x+1)^2 - x^2$ aussi, car $h(x) = 2x + 1$.
- **Somme et multiple.** La somme de deux fonctions affines est affine, et le produit d'une fonction affine par un nombre l'est aussi. Le **produit de deux** fonctions affines, en revanche, ne l'est généralement pas.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître une fonction affine

On compare chaque expression à la forme de référence :

$$f(x) = mx + p$$

a) **Affine**, écrite directement sous la bonne forme : $m = -4$ et $p = 7$.

b) **Affine**. Il suffit de réordonner les termes : $g(x) = -2x + 5$, donc $m = -2$ et $p = 5$.

L'ordre d'écriture ne change rien : ce qui compte est le coefficient **devant** x et le terme **sans** x .

c) **Non affine**. L'expression contient x^2 , qui n'apparaît pas dans la forme $mx + p$. On peut le vérifier sur les accroissements : $h(0) = 3$, $h(1) = 4$, $h(2) = 7$, donc les variations sont $+1$ puis $+3$ — elles ne sont pas constantes.

d) **Affine**. Le dénominateur est un **nombre**, on peut donc séparer :

$$k(x) = \frac{3x}{2} - \frac{1}{2} = 1,5x - 0,5$$

Donc $m = 1,5$ et $p = -0,5$.

Le piège de la question d). Une fraction ne disqualifie pas une fonction affine, à condition que le x soit au **numérateur**. En revanche $\frac{2}{x}$ ou $\frac{1}{x+3}$ ne sont pas affines : le x y est au dénominateur.

Le test universel. En cas de doute, on calcule $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$: si les deux accroissements sont égaux, la fonction est affine ; sinon elle ne l'est pas.

Réponse. a) affine, $m = -4$, $p = 7$ — b) affine, $m = -2$, $p = 5$ — c) non affine — d) affine, $m = 1,5$, $p = -0,5$.

Correction de l'exercice 2 - Calculer des images

a) On remplace x par chaque valeur dans $f(x) = 3x - 4$:

$$f(0) = -4 \quad f(2) = 6 - 4 = 2 \quad f(-3) = -9 - 4 = -13$$

La valeur $f(0) = -4$ est l'**ordonnée à l'origine** : elle se lit directement dans l'expression, c'est le terme sans x .

b) $f(0,5) = 3 \times 0,5 - 4 = 1,5 - 4 = -2,5$.

c) On calcule les deux différences :

$$f(3) - f(2) = (9 - 4) - (6 - 4) = 5 - 2 = 3$$

$$f(8) - f(7) = (24 - 4) - (21 - 4) = 20 - 17 = 3$$

Les deux valent 3, c'est-à-dire le **coefficient directeur**. Ce résultat illustre la propriété fondamentale des fonctions affines :

$$f(x+1) - f(x) = m$$

Quand x augmente de 1, l'image augmente toujours de m , **quel que soit** le point de départ. C'est ce qui distingue une fonction affine de toutes les autres.

La démonstration en une ligne.

$f(x+1) - f(x) = (3(x+1) - 4) - (3x - 4) = 3x + 3 - 4 - 3x + 4 = 3$ ✓ Le x disparaît : la variation ne dépend pas de l'endroit où l'on se place.

L'interprétation concrète. Si f donne un prix en fonction d'une quantité, $m = 3$ signifie « chaque unité supplémentaire coûte 3 € », toujours le même supplément.

Réponse. a) -4 ; 2 ; -13 — b) $-2,5$ — c) les deux différences valent $3 = m$: l'accroissement est constant.

Correction de l'exercice 3 - Chercher un antécédent

Chercher un antécédent, c'est **résoudre une équation** du premier degré.

a) On résout $f(x) = 1$:

$$-2x + 9 = 1 \Leftrightarrow -2x = -8 \Leftrightarrow x = 4$$

Contrôle : $f(4) = -8 + 9 = 1$ ✓

b) On résout $f(x) = 9$:

$$-2x + 9 = 9 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ce n'est pas un hasard : 9 est l'**ordonnée à l'origine**, donc son antécédent est 0.

c) On résout $f(x) = 0$:

$$-2x + 9 = 0 \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = 4,5$$

C'est l'abscisse du point où la droite coupe l'axe des abscisses.

d) **Exactement un.** L'équation $mx + p = k$ s'écrit $mx = k - p$, et comme $m \neq 0$ (la fonction n'est pas constante), elle a une unique solution :

$$x = \frac{k - p}{m}$$

Tout nombre a donc un antécédent, et un seul. Graphiquement, une droite non horizontale est coupée exactement une fois par toute droite horizontale.

Le cas exclu. Si $m = 0$, la fonction est constante égale à p : le nombre p a alors une **infinité** d'antécédents, et tous les autres n'en ont aucun. C'est pourquoi l'énoncé précise « non constante ».

Le piège de signe en a). De $-2x = -8$ on tire $x = 4$, et non $x = -4$: en divisant deux nombres négatifs, on obtient un positif.

Réponse. a) 4 — b) 0 — c) 4,5 — d) exactement un, car $m \neq 0$.

Correction de l'exercice 4 - Affine, linéaire ou constante ?

On identifie m et p pour chacune, puis on applique les définitions.

a) $f(x) = 5x$: ici $m = 5$ et $p = 0$. La fonction est **linéaire**. Elle traduit une proportionnalité : $f(2) = 10$ et $f(4) = 20$, donc doubler x double $f(x)$.

b) $g(x) = 7$: ici $m = 0$ et $p = 7$. La fonction est **constante** — toutes les images valent 7, quelle que soit la valeur de x .

c) $h(x) = 2x - 3$: ici $m = 2 \neq 0$ et $p = -3 \neq 0$. La fonction est **affine sans être linéaire ni constante**. Elle n'est pas proportionnelle : $h(2) = 1$ et $h(4) = 5$, or $5 \neq 2 \times 1$.

d) $k(x) = -x$: ici $m = -1$ et $p = 0$. La fonction est **linéaire** (le coefficient peut être négatif).

Fonction	m	p	Nature
$f(x) = 5x$	5	0	linéaire
$g(x) = 7$	0	7	constante
$h(x) = 2x - 3$	2	-3	affine seulement
$k(x) = -x$	-1	0	linéaire

Le vocabulaire, à ne pas inverser. Toute fonction linéaire est affine (avec $p = 0$), et toute fonction constante est affine (avec $m = 0$). L'inverse est faux : « affine » est la catégorie la plus large.

Le test de proportionnalité. Une fonction affine traduit une proportionnalité **si et seulement si** $p = 0$, c'est-à-dire si sa droite passe par l'**origine** du repère. C'est le critère à retenir.

Réponse. a) linéaire — b) constante — c) affine seulement — d) linéaire.

Correction de l'exercice 5 - Le taux de variation est constant

a) On applique la formule du taux de variation :

$$\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2}$$

Avec $f(2) = -3 + 4 = 1$ et $f(6) = -9 + 4 = -5$:

$$\frac{-5 - 1}{4} = \frac{-6}{4} = -1,5$$

b) De même, avec $f(-3) = 4,5 + 4 = 8,5$ et $f(1) = -1,5 + 4 = 2,5$:

$$\frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \frac{2,5 - 8,5}{4} = \frac{-6}{4} = -1,5$$

c) Les deux taux sont **égaux**, et valent exactement le coefficient directeur $m = -1,5$.

C'est la propriété caractéristique des fonctions affines :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m \quad \text{pour tous } a \neq b$$

Le taux de variation ne dépend **ni** du point de départ **ni** de la longueur de l'intervalle : c'est toujours le même nombre, lisible directement dans l'expression.

La démonstration générale. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(mb + p) - (ma + p)}{b - a} = \frac{m(b - a)}{b - a} = m$ ✓ Les p s'éliminent et le facteur $(b - a)$ se simplifie.

L'interprétation du signe. Ici $m = -1,5 < 0$: quand x augmente de 1, $f(x)$ **diminue** de 1,5. La fonction est donc décroissante — c'est le sujet de la plaquette 4.

Ce que cela permet. Si l'on sait qu'une fonction est affine, **deux** valeurs suffisent à trouver m . C'est exactement la méthode de la plaquette suivante.

Réponse. a) $-1,5$ — b) $-1,5$ — c) les deux taux valent $m = -1,5$: le taux de variation d'une fonction affine est constant.

Correction de l'exercice 6 - Accroissements constants dans un tableau

a) On soustrait chaque image de la suivante :

$$1 - (-2) = 3 \quad 4 - 1 = 3 \quad 7 - 4 = 3 \quad 10 - 7 = 3$$

Les quatre différences valent 3 : les accroissements sont **constants**.

b) Oui, la fonction **peut** être affine : c'est exactement la régularité attendue. Comme x augmente de 1 à chaque colonne et que l'image augmente de 3, le coefficient directeur est

$$m = 3$$

L'ordonnée à l'origine se lit dans la colonne $x = 0$:

$$p = f(0) = -2$$

D'où $f(x) = 3x - 2$. Contrôle sur deux colonnes non utilisées : $f(3) = 9 - 2 = 7$ ✓ et $f(4) = 12 - 2 = 10$ ✓

c) Avec l'expression trouvée :

$$f(10) = 30 - 2 = 28$$

La nuance du « peut ». Le tableau ne **prouve** pas que la fonction est affine : il ne donne que cinq valeurs, et rien ne dit ce qui se passe entre elles. Il rend l'hypothèse très plausible, et c'est tout — la question c) suppose implicitement qu'elle est vraie.

La méthode générale. Dans un tableau à pas régulier, on divise l'accroissement des images par celui des abscisses. Si le pas en x avait été 2 au lieu de 1, on aurait eu $m = \frac{3}{2} = 1,5$.

Le contrôle indispensable. Une fois m et p trouvés, on vérifie la formule sur une colonne **non utilisée** pour les calculer. C'est ce que fait la question b) avec $f(3)$ et $f(4)$.

Réponse. a) toutes égales à 3 — b) oui, $m = 3$ et $p = -2$, donc $f(x) = 3x - 2$ — c) $f(10) = 28$.

Correction de l'exercice 7 - Un tableau qui n'est pas affine

a) On calcule les quatre différences :

$$2 - 1 = 1 \quad 5 - 2 = 3 \quad 10 - 5 = 5 \quad 17 - 10 = 7$$

Les différences sont 1, 3, 5, 7 : elles **ne sont pas constantes**, elles augmentent de 2 à chaque fois.

b) Non, g ne peut **pas** être affine. Pour une fonction affine, les accroissements sont nécessairement constants :

$$g(x+1) - g(x) = m \quad \text{pour tout } x$$

Ici l'accroissement passe de 1 à 7 : la fonction est donc certainement d'une autre nature. Contrairement au cas de l'exercice précédent, on peut ici **conclure avec certitude** — un tableau réfute toujours, même s'il ne démontre jamais.

c) Les valeurs 1, 2, 5, 10, 17 sont les carrés augmentés de 1 :

$$0^2 + 1 = 1 \quad 1^2 + 1 = 2 \quad 2^2 + 1 = 5 \quad 3^2 + 1 = 10 \quad 4^2 + 1 = 17$$

Une expression possible est donc

$$g(x) = x^2 + 1$$

L'indice des différences. Quand les différences **premières** ne sont pas constantes mais que leurs propres différences le sont (ici $3 - 1 = 2$, $5 - 3 = 2$, $7 - 5 = 2$), on a affaire à une fonction du **second degré**. C'est une régularité utile à connaître.

La dissymétrie du raisonnement, encore. Des accroissements constants **suggèrent** une fonction affine ; des accroissements variables **prouvent** qu'elle ne l'est pas. Le tableau est un outil de réfutation, pas de démonstration.

Réponse. a) 1 ; 3 ; 5 ; 7 — b) non : les accroissements ne sont pas constants — c) par exemple $g(x) = x^2 + 1$.

Correction de l'exercice 8 - Développer avant de conclure

On développe systématiquement, puis on compare à $mx + p$.

a) $f(x) = 3x - 6 + x = 4x - 6$: **affine**, avec $m = 4$ et $p = -6$.

b) $g(x) = x^2 - 4x + x - 4 = x^2 - 3x - 4$: **non affine**, le terme x^2 subsiste.

c) On développe le carré :

$$h(x) = (x^2 + 6x + 9) - x^2 = 6x + 9$$

Les x^2 se **simplifient** : h est donc **affine**, avec $m = 6$ et $p = 9$. C'est le cas le plus piégeux de l'exercice — la présence d'un carré dans l'écriture ne suffit pas à disqualifier.

d) $k(x) = 2x - 2 - 2x = -2$: les termes en x disparaissent, k est **constante** (donc affine, avec $m = 0$ et $p = -2$).

La règle absolue. On ne juge **jamais** de la nature d'une fonction sur son écriture de départ : on développe d'abord. Les questions c) et d) le montrent dans les deux sens — un carré qui disparaît, et un x qui disparaît.

Le contrôle par trois images. Pour c) : $h(0) = 9$, $h(1) = 15$, $h(2) = 21$, donc des accroissements de 6 et 6 ✓ la fonction est bien affine de coefficient 6.

L'erreur symétrique. Conclure « non affine » dès qu'on voit une parenthèse au carré, ou « affine » dès qu'on voit une somme. Seul le développement tranche.

Réponse. a) $4x - 6$, affine — b) $x^2 - 3x - 4$, non affine — c) $6x + 9$, affine — d) -2 , constante donc affine.

Correction de l'exercice 9 - Somme de deux fonctions affines

a) On additionne les deux expressions en regroupant les termes semblables :

$$s(x) = (2x - 5) + (-3x + 1) = 2x - 3x - 5 + 1 = -x - 4$$

La fonction s est **affine**, avec $m = -1$ et $p = -4$.

b) On soustrait, en distribuant bien le signe moins devant la parenthèse :

$$d(x) = (2x - 5) - (-3x + 1) = 2x - 5 + 3x - 1 = 5x - 6$$

La fonction d est **affine**, avec $m = 5$ et $p = -6$.

c) On développe le produit :

$$q(x) = (2x - 5)(-3x + 1) = -6x^2 + 2x + 15x - 5 = -6x^2 + 17x - 5$$

La fonction q n'est **pas affine** : le terme $-6x^2$ subsiste.

La règle à retenir. La somme et la différence de deux fonctions affines sont affines ; leur **produit** ne l'est généralement pas. C'est logique : multiplier deux expressions contenant x fait apparaître x^2 .

Le cas où le produit reste affine. Si l'une des deux fonctions est **constante**, le produit est affine : par exemple $3 \times (2x - 5) = 6x - 15$. C'est le seul cas, car il faut qu'aucun x^2 n'apparaisse.

Le piège de la question b). Oublier de distribuer le signe moins et écrire $2x - 5 - 3x + 1 = -x - 4$: on obtiendrait la réponse de a) au lieu de celle de b). La parenthèse après le signe moins change **tous** les signes qu'elle contient.

Réponse. a) $s(x) = -x - 4$, affine — b) $d(x) = 5x - 6$, affine — c) $q(x) = -6x^2 + 17x - 5$, non affine.

Correction de l'exercice 10 - Un programme de calcul affine

a) On suit les trois étapes avec 4 :

- multiplier par 5 : 20 ;
- ajouter 3 : 23 ;
- retirer le double du nombre choisi, soit 8 : $23 - 8 = 15$.

Le programme renvoie 15.

b) On refait les mêmes étapes avec x :

$$x \longrightarrow 5x \longrightarrow 5x + 3 \longrightarrow 5x + 3 - 2x$$

En réduisant :

$$f(x) = 3x + 3$$

Contrôle avec la question a) : $f(4) = 12 + 3 = 15$ ✓

c) Oui, f est **affine**, avec $m = 3$ et $p = 3$.

C'est une bonne illustration de l'exercice sur le développement : l'écriture intermédiaire $5x + 3 - 2x$ contient deux termes en x , mais après réduction il n'en reste qu'un.

d) On cherche un **antécédent** de 18 : on résout

$$3x + 3 = 18 \Leftrightarrow 3x = 15 \Leftrightarrow x = 5$$

Il faut choisir 5. Contrôle par le programme : $5 \times 5 = 25$, puis $25 + 3 = 28$, puis $28 - 10 = 18$ ✓

Le piège de la dernière étape. « Retirer le double du nombre **choisi** » signifie retirer $2x$, et non retirer le double du résultat obtenu. Une lecture rapide donnerait

$5x + 3 - 2(5x + 3)$, soit $-5x - 3$: une tout autre fonction.

Ce que l'exercice montre. Un programme de calcul qui n'utilise que des multiplications par des nombres et des additions donne toujours une fonction **affine**. Il suffirait d'un « élever au carré » ou d'un « multiplier par lui-même » pour que ce ne soit plus le cas.

Réponse. a) 15 — b) $f(x) = 5x + 3 - 2x = 3x + 3$ — c) oui, $m = 3$ et $p = 3$ — d) choisir 5.

Correction de l'exercice 11 - Un tarif de taxi

a) Le prix est la prise en charge augmentée du prix kilométrique multiplié par la distance :

$$f(x) = 1,80x + 4$$

C'est une fonction **affine**, avec $m = 1,80$ et $p = 4$. Elle n'est pas linéaire, car $p \neq 0$.

b) Le coefficient directeur $m = 1,80$ est le **prix du kilomètre** : chaque kilomètre supplémentaire coûte 1,80 €.

L'ordonnée à l'origine $p = 4$ est la **prise en charge** : c'est ce qu'on paie pour 0 km, donc dès la montée dans le taxi.

c) Pour 12 km :

$$f(12) = 1,80 \times 12 + 4 = 21,60 + 4 = 25,60 \text{ €}$$

d) On cherche un antécédent de 31 : on résout

$$1,80x + 4 = 31 \Leftrightarrow 1,80x = 27 \Leftrightarrow x = \frac{27}{1,80} = 15$$

On a parcouru 15 km. Contrôle : $1,80 \times 15 = 27$, plus 4 € font bien 31 € ✓

Pourquoi le prix n'est pas proportionnel à la distance. À cause de la prise en charge. Le prix au kilomètre **payé** diminue avec la distance : $\frac{25,60}{12} \approx 2,13$ € le km pour 12 km, contre $\frac{31}{15} \approx 2,07$ € pour 15 km. Plus la course est longue, plus la part fixe se dilue.

Le test de proportionnalité. Une course de 24 km coûterait $1,80 \times 24 + 4 = 47,20$ €, et non le double de 25,60 € (soit 51,20 €). Doubler la distance ne double pas le prix : la fonction est affine, pas linéaire.

Réponse. a) $f(x) = 1,80x + 4$, fonction affine — b) 1,80 € le kilomètre et 4 € de prise en charge — c) 25,60 € — d) 15 km.

Correction de l'exercice 12 - Retrouver une expression à partir de deux images

a) Pour une fonction affine, le coefficient directeur est le taux de variation entre deux points quelconques :

$$m = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{17 - 5}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

b) On sait maintenant que $f(x) = 4x + p$. Il reste à utiliser une des deux images connues, par exemple $f(1) = 5$:

$$4 \times 1 + p = 5 \Leftrightarrow 4 + p = 5 \Leftrightarrow p = 1$$

c) L'expression est donc

$$f(x) = 4x + 1$$

Contrôle avec l'**autre** image, celle qui n'a pas servi : $f(4) = 16 + 1 = 17$ ✓

Puis $f(10) = 40 + 1 = 41$.

La méthode en deux temps, à retenir. Le taux de variation donne m ; une image quelconque donne ensuite p . Deux informations, deux coefficients — c'est exactement ce qu'il faut, et c'est l'objet de la plaquette suivante.

Le contrôle obligatoire. On vérifie toujours sur le point **non utilisé** pour calculer p . Si les deux images servaient au contrôle, il ne prouverait rien.

Pourquoi l'hypothèse « affine » est indispensable. Sans elle, une infinité de fonctions passent par $(1; 5)$ et $(4; 17)$. C'est l'énoncé qui fournit le **type** de fonction ; les deux images fournissent les coefficients.

Réponse. a) $m = 4$ — b) $p = 1$ — c) $f(x) = 4x + 1$ et $f(10) = 41$.

Correction de l'exercice 13 - Vrai ou faux sur les fonctions affines

a) **Vrai.** Une fonction linéaire s'écrit $f(x) = mx$, ce qui est le cas particulier $p = 0$ de la forme $mx + p$. Elle est donc bien affine.

b) **Faux.** Contre-exemple : $f(x) = 2x + 3$ est affine mais pas linéaire, puisque $p = 3 \neq 0$. On le vérifie sur la proportionnalité : $f(1) = 5$ et $f(2) = 7$, alors qu'une fonction linéaire donnerait $f(2) = 2 \times f(1) = 10$.

c) **Vrai.** Si f est affine, $f(x) = mx + p$ avec $p = f(0)$. L'hypothèse $f(0) = 0$ donne donc $p = 0$, d'où

$$f(x) = mx$$

La fonction est linéaire. C'est le **critère** de reconnaissance : une fonction affine est linéaire si et seulement si sa droite passe par l'origine.

d) **Faux.** Cette égalité caractérise les fonctions **linéaires**, pas les affines. Contre-exemple avec $f(x) = 2x + 3$:

$$f(2) = 7 \quad \text{mais} \quad 2 \times f(1) = 2 \times 5 = 10$$

L'affirmation serait vraie si l'on ajoutait l'hypothèse $f(0) = 0$.

Le schéma des inclusions. Les fonctions linéaires et les fonctions constantes sont deux familles **à l'intérieur** des fonctions affines. Une seule fonction appartient aux deux : la fonction nulle $f(x) = 0$, avec $m = 0$ et $p = 0$.

Le réflexe de vérification. Pour tester une affirmation de ce type, on prend le contre-exemple le plus simple possible : $f(x) = 2x + 3$ suffit à réfuter b) et d).

Réponse. a) vrai — b) faux ($f(x) = 2x + 3$) — c) vrai, car $p = f(0) = 0$ — d) faux, cette égalité caractérise les fonctions linéaires.

Correction de l'exercice 14 - Deux fonctions affines et leur écart

a) Les quatre images :

$$f(0) = 2 \quad g(0) = -5 \quad f(4) = 14 \quad g(4) = 7$$

On remarque que l'écart est le même dans les deux cas : $2 - (-5) = 7$ et $14 - 7 = 7$.

b) On calcule la différence en toute généralité :

$$f(x) - g(x) = (3x + 2) - (3x - 5) = 3x + 2 - 3x + 5 = 7$$

L'écart est **constant**, égal à 7, quelle que soit la valeur de x . Les termes en x s'éliminent parce que les deux fonctions ont le **même coefficient directeur** $m = 3$.

c) Non, jamais. Si $f(x) = g(x)$ pour un certain x , alors $f(x) - g(x) = 0$, ce qui est impossible puisque cette différence vaut constamment 7.

On peut aussi le résoudre directement :

$$3x + 2 = 3x - 5 \Leftrightarrow 2 = -5$$

ce qui est absurde : l'équation n'a **aucune** solution.

L'interprétation graphique. Deux fonctions affines de même coefficient directeur ont des droites **parallèles** : elles gardent toujours le même écart vertical et ne se croisent jamais. Ici l'écart vaut 7, et la droite de f est constamment au-dessus de celle de g .

Le critère de parallélisme. Deux droites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$. Si en plus $p = p'$, elles sont **confondues** et les deux fonctions sont égales.

Réponse. a) 2 et -5 , puis 14 et 7 — b) $f(x) - g(x) = 7$, écart constant — c) non : l'équation $f(x) = g(x)$ mène à $2 = -5$, absurde (droites parallèles).

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : reconnaître, calculer, interpréter

a) On développe le carré, puis on réduit :

$$(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$f(x) = (4x^2 + 4x + 1) - 4x^2 = 4x + 1$$

Les termes en x^2 se **simplifient** : la fonction est bien **affine**, avec

$$m = 4 \quad p = 1$$

C'est le piège classique : l'écriture de départ contient un carré, mais la fonction n'en est pas moins affine.

b) On utilise la forme réduite :

$$f(0) = 1 \quad f(3) = 12 + 1 = 13 \quad f(-2) = -8 + 1 = -7$$

Contrôle de $f(-2)$ avec l'écriture d'origine :

$$(2 \times (-2) + 1)^2 - 4 \times 4 = (-3)^2 - 16 = 9 - 16 = -7 \quad \checkmark$$

c) On applique la formule du taux de variation :

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{13 - 1}{3} = \frac{12}{3} = 4 = m \quad \checkmark$$

Le taux de variation d'une fonction affine est constant et égal au coefficient directeur — c'est vérifié.

d) On cherche un antécédent de 21 : on résout

$$4x + 1 = 21 \Leftrightarrow 4x = 20 \Leftrightarrow x = 5$$

L'antécédent de 21 est 5. Contrôle : $f(5) = 20 + 1 = 21 \quad \checkmark$

e) Dans ce contexte, $m = 4$ est le **prix d'une prestation** : chaque prestation supplémentaire coûte 4 €. Et $p = 1$ est une **part fixe** de 1 € (frais de dossier), payée dès la première commande.

Pour 10 prestations :

$$f(10) = 40 + 1 = 41 \text{ €}$$

Le bilan de la plaquette. Une fonction affine, c'est deux nombres — m et p — et trois façons de les obtenir : lecture directe dans l'expression **réduite**, taux de variation entre deux points, ou accroissements constants dans un tableau. Et un réflexe avant toute conclusion : **développer**.

Réponse. a) $f(x) = 4x + 1$, affine avec $m = 4$ et $p = 1$ — b) 1 ; 13 ; -7 — c) le taux vaut $4 = m \quad \checkmark$ — d) l'antécédent de 21 est 5 — e) 4 € par prestation plus 1 € fixe, soit 41 € pour dix prestations.