

## Plaquette 5 - Problèmes de synthèse

### Fonctions affines — Seconde

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Modéliser un problème par une fonction affine.

- **La situation type.** Une grandeur comporte une **part fixe** et une part **proportionnelle** à  $x$  :

$$f(x) = m \times x + p$$

où  $m$  est le **prix unitaire** (ou le débit, le taux) et  $p$  la **part fixe** (ou la valeur initiale).

- **Reconnaître une situation affine.** Les mots qui l'annoncent : « abonnement puis tant par unité », « frais fixes », « prise en charge », « volume initial », « salaire de base plus commission ».
- **Reconnaître une situation linéaire** ( $p = 0$ ) : une **conversion** (devises, unités), une vitesse constante à partir de zéro, un prix strictement proportionnel. Le test :  $f(0) = 0$ .
- **Les trois questions types.**
  - « combien pour  $x$  ? » → calculer  $f(x)$       « quel  $x$  pour  $k$  ? » → résoudre  $f(x) = k$
  - « à partir de quand ? » → résoudre  $f(x) \leq g(x)$  ou  $f(x) = g(x)$  puis comparer les pentes
- **Comparer deux offres.** On résout  $f(x) = g(x)$  : la solution est le **seuil de bascule**. Avant, la moins chère est celle de plus petite part fixe ; après, celle de plus petit prix unitaire.
- **Arrondir dans le bon sens.** « Ne pas dépasser un budget » : vers le **bas**. « Atteindre un objectif » : vers le **haut**. Et l'on teste toujours les deux entiers voisins.
- **Le domaine et le contexte.** Une quantité est positive, souvent entière. Une solution négative ou non entière se discute avant d'être écartée — et le modèle affine a presque toujours une plage de validité limitée.

#### Correction de l'exercice 1 - Deux formules de téléphone

- a) Chaque formule additionne une part fixe et un prix par minute :

$$A(x) = 0,15x + 12 \quad B(x) = 0,05x + 20$$

- b) Pour 60 minutes :

$$A(60) = 9 + 12 = 21 \text{ €} \quad B(60) = 3 + 20 = 23 \text{ €}$$

La formule A est moins chère à ce niveau de consommation.

- c) On cherche à partir de quand  $B(x) < A(x)$  :

$$0,05x + 20 < 0,15x + 12 \Leftrightarrow 20 - 12 < 0,15x - 0,05x \Leftrightarrow 8 < 0,10x \Leftrightarrow x > 80$$

La formule B devient plus avantageuse **à partir de 81 minutes**. À exactement 80 minutes, les deux coûtent le même prix :

$$A(80) = 12 + 12 = 24 \text{ €} \quad B(80) = 4 + 20 = 24 \text{ €} \checkmark$$

**La logique des deux offres.** B a une part fixe plus élevée (20 € contre 12 €) mais un prix à la minute trois fois plus bas (0,05 € contre 0,15 €). Elle est donc perdante pour un petit

usage et gagnante pour un gros : c'est le principe de tout abonnement.

**Le contrôle par une valeur.** À 100 minutes :  $A(100) = 27$  € et  $B(100) = 25$  €, donc B est bien la moins chère ✓ et  $100 > 80$ .

**Le raccourci des pentes.** Sans résoudre, on sait déjà que B finira par gagner : sa pente (0,05) est plus faible. La résolution ne sert qu'à trouver **quand**.

**Réponse.** a)  $A(x) = 0,15x + 12$  et  $B(x) = 0,05x + 20$  — b) 21 € contre 23 € — c) à partir de 81 minutes (égalité à 80 min, 24 € chacune).

## Correction de l'exercice 2 - Une conversion de devises

a) Chaque euro donne 1,08 dollar, donc

$$f(x) = 1,08x$$

Il n'y a **pas** de part fixe : la fonction est **linéaire**, et elle traduit une **proportionnalité**. On le vérifie avec  $f(0) = 0$  : changer zéro euro donne zéro dollar.

b) Pour 250 euros :

$$f(250) = 1,08 \times 250 = 270 \text{ dollars}$$

c) On cherche un **antécédent** de 540 : on résout

$$1,08x = 540 \Leftrightarrow x = \frac{540}{1,08} = 500$$

Il faut changer 500 euros. Contrôle :  $1,08 \times 500 = 540$  ✓

**Pourquoi c'est une proportionnalité.** Doubler la somme change double le nombre de dollars :  $f(500) = 540$  est bien le double de  $f(250) = 270$ . Le quotient  $\frac{f(x)}{x}$  vaut toujours 1,08, c'est le **taux de change**.

**La limite du modèle.** Dans la réalité, les bureaux de change prélèvent une **commission**, souvent fixe. Le modèle deviendrait alors affine, du type  $f(x) = 1,08x - 3$ , et la proportionnalité serait perdue : changer 10 € ne rapporterait plus proportionnellement autant que changer 1 000 €.

**Le contrôle de vraisemblance.** Puisque  $1,08 > 1$ , on doit obtenir **plus** de dollars que d'euros changés :  $270 > 250$  ✓ et  $540 > 500$  ✓

**Réponse.** a)  $f(x) = 1,08x$ , fonction linéaire — b) 270 dollars — c) 500 euros.

## Correction de l'exercice 3 - Une location de voiture

a) Le montant additionne le forfait journalier et le prix kilométrique :

$$f(x) = 0,30x + 35$$

b) Pour 200 km :

$$f(200) = 0,30 \times 200 + 35 = 60 + 35 = 95 \text{ €}$$

c) La contrainte « disposer de 110 € » se traduit par  $f(x) \leq 110$  :

$$0,30x + 35 \leq 110 \Leftrightarrow 0,30x \leq 75 \Leftrightarrow x \leq \frac{75}{0,30} = 250$$

Le client peut parcourir au maximum 250 **kilomètres**. Contrôle :  $f(250) = 75 + 35 = 110$  € ✓ exactement son budget.

**Le sens de l'arrondi.** Ici le résultat tombe juste, mais s'il avait valu 250,7, il aurait fallu arrondir **vers le bas** à 250 km : la contrainte est de **ne pas dépasser** le budget.

**L'interprétation des deux coefficients.**  $p = 35$  € est ce qu'on paie même sans rouler (la mise à disposition du véhicule), et  $m = 0,30$  € est le coût de chaque kilomètre

(carburant, usure). La facture n'est donc **pas** proportionnelle à la distance.

**Le contrôle du prix moyen.** Pour 100 km, le prix au kilomètre payé est  $\frac{65}{100} = 0,65$  € ; pour 250 km, il est  $\frac{110}{250} = 0,44$  €. Plus on roule, plus le forfait se dilue : c'est la signature d'une part fixe.

**Réponse.** a)  $f(x) = 0,30x + 35$  — b) 95 € — c) au maximum 250 km.

### Correction de l'exercice 4 - Un salaire avec commission

a) La commission de 5 % du chiffre d'affaires vaut  $0,05x$ , à laquelle s'ajoute le fixe :

$$S(x) = 0,05x + 1\,200$$

b) Pour  $x = 20\,000$  :

$$S(20\,000) = 0,05 \times 20\,000 + 1\,200 = 1\,000 + 1\,200 = 2\,200 \text{ €}$$

c) On résout  $S(x) = 1\,800$  :

$$0,05x + 1\,200 = 1\,800 \Leftrightarrow 0,05x = 600 \Leftrightarrow x = \frac{600}{0,05} = 12\,000$$

Il doit réaliser 12 000 € de chiffre d'affaires.

d) On calcule le salaire correspondant :

$$S(30\,000) = 1\,500 + 1\,200 = 2\,700 \text{ €}$$

Ce n'est pas suffisant : il lui manque 300 €. Pour atteindre 3 000 €, il faudrait

$$0,05x + 1\,200 = 3\,000 \Leftrightarrow 0,05x = 1\,800 \Leftrightarrow x = 36\,000 \text{ €}$$

**Le piège du pourcentage.** 5 % s'écrit 0,05 et non 5 dans la formule : une erreur ici multiplierait le salaire par cent. Le contrôle de vraisemblance (5 % de 20 000 € font 1 000 €, pas 100 000 €) l'attrape immédiatement.

**Le salaire minimal garanti.**  $S(0) = 1\,200$  € : même sans aucune vente, le vendeur touche son fixe. C'est précisément l'ordonnée à l'origine, et c'est ce qui distingue ce salaire d'une rémunération purement proportionnelle.

**Le contrôle de la question c).** 5 % de 12 000 € font 600 €, plus 1 200 € de fixe : 1 800 € ✓

**Réponse.** a)  $S(x) = 0,05x + 1\,200$  — b) 2 200 € — c) 12 000 € de chiffre d'affaires — d) non, 2 700 € seulement ; il faudrait 36 000 €.

### Correction de l'exercice 5 - Température et altitude

a) Une baisse de 0,6 °C tous les 100 m correspond à 0,006 °C par mètre. La température initiale étant 20 °C :

$$T(a) = -0,006a + 20$$

Le coefficient est **négatif** car la température **diminue** avec l'altitude.

b) À 1 500 m :

$$T(1\,500) = -0,006 \times 1\,500 + 20 = -9 + 20 = 11 \text{ °C}$$

c) On résout  $T(a) = 5$  :

$$-0,006a + 20 = 5 \Leftrightarrow 0,006a = 15 \Leftrightarrow a = \frac{15}{0,006} = 2\,500$$

La température atteint 5 °C à 2 500 m d'altitude.

d) On résout  $T(a) = -30$  :

$$-0,006a + 20 = -30 \Leftrightarrow 0,006a = 50 \Leftrightarrow a = \frac{50}{0,006} \approx 8\,333 \text{ m}$$

Le modèle prévoit donc  $-30\text{ °C}$  vers  $8\,333 \text{ m}$  — soit l'altitude de croisière des sommets himalayens, où de telles températures sont effectivement observées. Le résultat est **plausible**.

Il cesserait de l'être bien plus haut : au-delà de la troposphère (environ  $11\,000 \text{ m}$ ), la température ne baisse plus de la même façon, et le modèle affine ne vaut plus.

**La conversion du taux.**  $0,6\text{ °C}$  pour  $100 \text{ m}$  donne  $\frac{0,6}{100} = 0,006\text{ °C}$  par mètre. Oublier cette division est l'erreur principale : on obtiendrait  $-0,6a$ , soit  $-880\text{ °C}$  à  $1\,500 \text{ m}$ .

**Le contrôle de vraisemblance.**  $1\,500 \text{ m}$  représentent  $15$  tranches de  $100 \text{ m}$ , donc une baisse de  $15 \times 0,6 = 9\text{ °C}$  : de  $20\text{ °C}$  on passe à  $11\text{ °C}$  ✓

**Réponse.** a)  $T(a) = -0,006a + 20$  — b)  $11\text{ °C}$  — c) à  $2\,500 \text{ m}$  — d) vers  $8\,333 \text{ m}$ , ce qui reste plausible dans la troposphère.

### Correction de l'exercice 6 - Coût, recette et seuil de rentabilité

a) La recette est proportionnelle au nombre d'objets vendus :

$$R(x) = 12x$$

Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût :

$$B(x) = 12x - (6x + 450) = 6x - 450$$

b) Pour  $50$  objets :

$$B(50) = 300 - 450 = -150$$

soit une **perte** de  $150\text{ €}$ . Pour  $100$  objets :

$$B(100) = 600 - 450 = 150\text{ €}$$

de bénéfice.

c) Le seuil de rentabilité est la production pour laquelle le bénéfice est **nul** :

$$6x - 450 = 0 \Leftrightarrow 6x = 450 \Leftrightarrow x = 75$$

Il faut vendre  $75$  objets pour couvrir exactement les frais.

d) On résout  $B(x) \geq 300$  :

$$6x - 450 \geq 300 \Leftrightarrow 6x \geq 750 \Leftrightarrow x \geq 125$$

Il faut vendre au moins  $125$  **objets**. Contrôle :  $B(125) = 750 - 450 = 300\text{ €}$  ✓

**L'interprétation des deux coefficients du bénéfice.** Dans  $B(x) = 6x - 450$ , le  $6$  est la **marge** par objet ( $12\text{ €}$  de vente moins  $6\text{ €}$  de coût variable), et le  $-450$  est le **coût fixe** à amortir. Il faut donc  $\frac{450}{6} = 75$  objets pour l'amortir, ce qui redonne le seuil.

**Le sens de l'arrondi.** Ici « au moins  $300\text{ €}$  » impose d'arrondir vers le **haut** si le résultat n'était pas entier. Il tombe juste, mais le réflexe reste : on teste  $B(124) = 294\text{ €} < 300$  ✓ et  $B(125) = 300\text{ €}$  ✓

**Le contrôle de cohérence.**  $B(50) < 0 < B(100)$ , et  $50 < 75 < 100$  : le seuil est bien entre les deux ✓

**Réponse.** a)  $R(x) = 12x$  et  $B(x) = 6x - 450$  — b)  $-150\text{ €}$  puis  $+150\text{ €}$  — c)  $75$  objets — d) au moins  $125$  objets.

### Correction de l'exercice 7 - Une facture d'électricité

a) La facture additionne l'abonnement et le prix de l'énergie :

$$f(x) = 0,18x + 14$$

b) Pour 250 kWh :

$$f(250) = 0,18 \times 250 + 14 = 45 + 14 = 59 \text{ €}$$

c) On résout  $f(x) = 86$  :

$$0,18x + 14 = 86 \Leftrightarrow 0,18x = 72 \Leftrightarrow x = \frac{72}{0,18} = 400$$

Le client a consommé 400 kWh.

d) Non. En divisant sa consommation par deux, il passerait de 400 à 200 kWh, et sa facture deviendrait

$$f(200) = 36 + 14 = 50 \text{ €}$$

Or la moitié de 86 € serait 43 € : la facture ne baisse que de 86 à 50 €, soit une réduction de 42 % et non de 50 %.

La raison : l'**abonnement de 14 €** est payé quelle que soit la consommation. Seule la part proportionnelle est divisée par deux.

**Le test de proportionnalité.** La facture serait divisée par deux si la fonction était **linéaire**, c'est-à-dire si  $p = 0$ . Ici  $f(0) = 14 \neq 0$  : même sans consommer, le client paie 14 €.

**Le contrôle par le prix moyen du kWh.** Pour 400 kWh, il paie  $\frac{86}{400} \approx 0,215$  € le kWh ; pour 200 kWh,  $\frac{50}{200} = 0,25$  €. Le prix moyen **augmente** quand on consomme moins, car l'abonnement se répartit sur moins de kWh.

**L'enseignement pratique.** Réduire sa consommation reste rentable, mais moins que proportionnellement. C'est exactement ce que traduit une fonction affine avec  $p > 0$ .

**Réponse.** a)  $f(x) = 0,18x + 14$  — b) 59 € — c) 400 kWh — d) non :  $f(200) = 50$  € et non 43 €, à cause de l'abonnement fixe.

## Correction de l'exercice 8 - Deux offres sur un graphique

a) Le coût initial se lit à  $x = 0$ , sur l'axe des ordonnées :

$$A(0) = 30 \text{ €} \quad B(0) = 6 \text{ €}$$

L'offre A demande donc 30 € à l'inscription, contre 6 € pour B.

b) Le prix mensuel est le **coefficient directeur** de chaque droite.

Pour A, entre (0 ; 30) et (10 ; 90) :  $m_A = \frac{90-30}{10} = 6$  € par mois.

Pour B, entre (0 ; 6) et (10 ; 96) :  $m_B = \frac{96-6}{10} = 9$  € par mois.

Les expressions sont donc  $A(x) = 6x + 30$  et  $B(x) = 9x + 6$ .

c) Graphiquement, les deux droites se croisent vers  $x = 8$ . Par le calcul :

$$6x + 30 < 9x + 6 \Leftrightarrow 30 - 6 < 9x - 6x \Leftrightarrow 24 < 3x \Leftrightarrow x > 8$$

L'offre A devient la moins chère **à partir du neuvième mois**. À exactement 8 mois, les deux coûtent le même prix :

$$A(8) = 48 + 30 = 78 \text{ €} \quad B(8) = 72 + 6 = 78 \text{ €} \quad \checkmark$$

**La logique des deux offres.** A fait payer cher à l'entrée (30 €) mais peu par mois (6 €) : elle est faite pour durer. B attire avec un coût initial dérisoire (6 €) mais un abonnement plus lourd (9 €). Le croisement à 8 mois est le seuil de bascule.

**Le réflexe de lecture.** La droite qui part le **plus bas** mais monte le **plus vite** finit

toujours par passer au-dessus. Comparer les pentes suffit à savoir qui gagne à long terme, sans aucun calcul.

**Réponse.** a) 30 € pour A, 6 € pour B — b) 6 €/mois pour A, 9 €/mois pour B — c) à partir du neuvième mois (égalité à 8 mois, 78 € chacune).

### Correction de l'exercice 9 - Un réservoir qui se remplit

a) Le volume initial est 120 litres, et chaque minute ajoute 18 litres :

$$V(t) = 18t + 120$$

b) Un quart d'heure vaut 15 minutes :

$$V(15) = 18 \times 15 + 120 = 270 + 120 = 390 \text{ litres}$$

c) On résout  $V(t) = 840$  :

$$18t + 120 = 840 \Leftrightarrow 18t = 720 \Leftrightarrow t = 40$$

Le réservoir est plein au bout de 40 minutes.

d) Le second réservoir est décrit par la fonction **linéaire**  $W(t) = 30t$  (il part de zéro). On résout  $W(t) = V(t)$  :

$$30t = 18t + 120 \Leftrightarrow 30t - 18t = 120 \Leftrightarrow 12t = 120 \Leftrightarrow t = 10$$

Les deux réservoirs contiennent la même chose au bout de 10 **minutes**. Contrôle :

$$V(10) = 180 + 120 = 300 \quad W(10) = 300 \quad \checkmark$$

**Le rattrapage.** Le second réservoir part avec 120 litres de retard mais gagne  $30 - 18 = 12$  litres par minute sur le premier. Il lui faut donc  $\frac{120}{12} = 10$  minutes pour le rattraper — un raisonnement direct qui confirme le calcul.

**Après le rattrapage.** Au-delà de 10 minutes, le second dépasse le premier : à  $t = 20$ ,  $W(20) = 600$  contre  $V(20) = 480$ . La plus grande pente finit toujours par l'emporter.

**La limite du modèle.**  $V(t) = 18t + 120$  n'a de sens que tant que le réservoir n'est pas plein, donc sur  $[0; 40]$ . Au-delà, l'eau déborde et le volume reste à 840 litres.

**Réponse.** a)  $V(t) = 18t + 120$  — b) 390 litres — c) au bout de 40 minutes — d) au bout de 10 minutes (300 litres chacun).

### Correction de l'exercice 10 - Un périmètre en fonction d'une longueur

a) La longueur vaut  $x + 3$ , et le périmètre est le double de la somme des deux dimensions :

$$P(x) = 2 \times (x + (x + 3)) = 2(2x + 3) = 4x + 6$$

b) Oui,  $P$  est **affine** : elle s'écrit sous la forme  $mx + p$  avec

$$m = 4 \quad p = 6$$

Le coefficient 4 signifie que chaque centimètre de largeur en plus ajoute 4 cm au périmètre — ce qui est logique, puisque la largeur **et** la longueur augmentent alors chacune de 1 cm, sur deux côtés chacune.

c) Pour  $x = 5$  :

$$P(5) = 20 + 6 = 26 \text{ cm}$$

(Le rectangle mesure 5 cm sur 8 cm, d'où  $2 \times 13 = 26$  cm ✓)

Pour un périmètre de 34 cm, on résout :

$$4x + 6 = 34 \Leftrightarrow 4x = 28 \Leftrightarrow x = 7$$

La largeur est de 7 cm (le rectangle mesure alors 7 cm sur 10 cm).

d) Non. L'aire est le produit des deux dimensions :

$$A(x) = x(x + 3) = x^2 + 3x$$

Le terme  $x^2$  subsiste après développement : la fonction  $A$  n'est **pas** affine. On peut le vérifier sur les accroissements :  $A(1) = 4$ ,  $A(2) = 10$ ,  $A(3) = 18$ , soit des écarts de 6 puis 8 — non constants.

**La différence de nature.** Le périmètre est une **somme** de longueurs : il reste affine. L'aire est un **produit** de deux longueurs qui varient toutes deux : elle ne l'est pas. C'est une distinction à retenir pour tous les problèmes de géométrie.

**Le domaine.** Il faut  $x > 0$  pour que le rectangle existe. La solution  $x = 7$  convient ✓

**Réponse.** a)  $P(x) = 4x + 6$  — b) oui,  $m = 4$  et  $p = 6$  — c)  $P(5) = 26$  cm, et largeur 7 cm pour 34 cm de périmètre — d) non :  $A(x) = x^2 + 3x$  n'est pas affine.

### Correction de l'exercice 11 - Un problème avec tableau

a) On compare les accroissements. Entre 100 et 200 exemplaires, le prix augmente de  $86 - 58 = 28$  € pour 100 exemplaires. Entre 400 et 500, il augmente de  $170 - 142 = 28$  € pour 100 exemplaires également.

Et entre 200 et 400, soit 200 exemplaires :  $142 - 86 = 56$  €, soit 28 € par tranche de 100 ✓

Le prix augmente donc **régulièrement** : la fonction peut être affine.

b) Le coefficient directeur est le prix par exemplaire :

$$m = \frac{86 - 58}{200 - 100} = \frac{28}{100} = 0,28$$

Pour  $p$ , on remplace dans un point, par exemple (100 ; 58) :

$$0,28 \times 100 + p = 58 \Leftrightarrow 28 + p = 58 \Leftrightarrow p = 30$$

D'où  $f(x) = 0,28x + 30$ .

**Contrôle** sur un point non utilisé, (500 ; 170) :  $140 + 30 = 170$  ✓

c) Le coefficient  $m = 0,28$  est le **prix d'un exemplaire** : 28 centimes l'unité. Et  $p = 30$  € est la **part fixe** — les frais de mise en route de la presse, payés quel que soit le tirage.

d) On résout  $f(x) \leq 240$  :

$$0,28x + 30 \leq 240 \Leftrightarrow 0,28x \leq 210 \Leftrightarrow x \leq \frac{210}{0,28} = 750$$

On peut imprimer au maximum 750 **exemplaires**. Contrôle :  $f(750) = 210 + 30 = 240$  € ✓

**Pourquoi le prix unitaire baisse avec le tirage.** Pour 100 exemplaires, le prix moyen est  $\frac{58}{100} = 0,58$  € l'unité ; pour 500, il est  $\frac{170}{500} = 0,34$  €. La part fixe de 30 € se répartit sur davantage d'exemplaires : c'est l'argument commercial classique des gros tirages.

**Réponse.** a) accroissement constant de 28 € par tranche de 100 — b)  $f(x) = 0,28x + 30$  — c) 0,28 € l'exemplaire et 30 € de frais fixes — d) 750 exemplaires.

### Correction de l'exercice 12 - Choisir entre trois offres

a) Les trois expressions :

$$A(x) = 2x \quad B(x) = x + 15 \quad C(x) = 35$$

L'offre A est **linéaire** (pas d'abonnement), l'offre C est **constante** (le prix ne dépend pas du nombre de séances).

b) Pour 10 séances :

$$A(10) = 20 \text{ €} \quad B(10) = 25 \text{ €} \quad C(10) = 35 \text{ €}$$

L'offre A est la moins chère. Pour 25 séances :

$$A(25) = 50 \text{ €} \quad B(25) = 40 \text{ €} \quad C(25) = 35 \text{ €}$$

Cette fois c'est l'offre C.

c) On compare les offres deux à deux.

**A et B** :  $2x < x + 15 \Leftrightarrow x < 15$ . L'offre A bat B en dessous de 15 séances.

**B et C** :  $x + 15 < 35 \Leftrightarrow x < 20$ . L'offre B bat C en dessous de 20 séances.

**A et C** :  $2x < 35 \Leftrightarrow x < 17,5$ .

En recoupant ces trois comparaisons :

| Nombre de séances | Offre la plus avantageuse | Coût     |
|-------------------|---------------------------|----------|
| moins de 15       | A                         | $2x$     |
| entre 15 et 20    | B                         | $x + 15$ |
| plus de 20        | C                         | 35       |

Aux seuils : à 15 séances, A et B coûtent tous deux 30 € ; à 20 séances, B et C coûtent tous deux 35 €.

**La logique d'ensemble.** Les trois offres sont classées par part fixe **croissante** (0, 15, 35) et par prix unitaire **décroissant** (2, 1, 0). Chacune est donc optimale sur une plage, dans cet ordre : c'est la structure classique d'une gamme tarifaire.

**Le contrôle par un cas intermédiaire.** À 17 séances :  $A(17) = 34 \text{ €}$ ,  $B(17) = 32 \text{ €}$ ,  $C(17) = 35 \text{ €}$  : B est bien la moins chère ✓ et  $15 < 17 < 20$ .

**Réponse.** a)  $A(x) = 2x$ ,  $B(x) = x + 15$ ,  $C(x) = 35$  — b) 20 / 25 / 35 €, puis 50 / 40 / 35 € — c) A en dessous de 15 séances, B entre 15 et 20, C au-delà.

### Correction de l'exercice 13 - Un modèle qui cesse d'être valable

a) La hauteur initiale est 18 cm, et chaque heure en retire 1,5 :

$$h(t) = -1,5t + 18$$

b) Au bout de 4 heures :

$$h(4) = -6 + 18 = 12 \text{ cm}$$

c) La bougie est consumée quand sa hauteur atteint zéro :

$$-1,5t + 18 = 0 \Leftrightarrow 1,5t = 18 \Leftrightarrow t = 12$$

Elle est entièrement consumée au bout de 12 **heures**.

d) Le calcul est exact :

$$h(15) = -22,5 + 18 = -4,5$$

mais ce résultat est **absurde** : une hauteur ne peut pas être négative. Le modèle continue de « brûler » une bougie qui n'existe plus.

Le domaine de validité est donc

$$[0; 12]$$

Au-delà de 12 heures, la hauteur reste **nulle** : la fonction réelle n'est plus affine, elle devient constante égale à 0.

**La leçon de modélisation.** Un modèle affine décrit correctement un phénomène sur une **plage limitée**. Il faut toujours se demander où il cesse d'avoir un sens — ici, quand la grandeur modélisée devient négative alors qu'elle doit rester positive.

**Le réflexe à avoir.** Devant une fonction affine **décroissante** modélisant une grandeur positive (hauteur, volume, stock, distance restante), on cherche systématiquement son **zéro** : c'est la borne du domaine de validité.

**Le contrôle de vraisemblance.** 18 cm à raison de 1,5 cm par heure font  $\frac{18}{1,5} = 12$  heures ✓ cohérent avec la question c).

**Réponse.** a)  $h(t) = -1,5t + 18$  — b) 12 cm — c) au bout de 12 heures — d) une hauteur négative est impossible : le modèle n'est valable que sur  $[0 ; 12]$ .

### Correction de l'exercice 14 - Deux véhicules sur une route

a) La première voiture part de A (distance nulle) à 80 km/h :

$$d_1(t) = 80t$$

C'est une fonction **linéaire**. La seconde part de 30 km à 60 km/h :

$$d_2(t) = 60t + 30$$

C'est une fonction **affine**, l'ordonnée à l'origine étant son avance initiale.

b) Au bout d'une heure :

$$d_1(1) = 80 \text{ km} \quad d_2(1) = 60 + 30 = 90 \text{ km}$$

La seconde voiture est encore devant, de 10 km.

c) La première rattrape la seconde quand les deux distances sont égales :

$$80t = 60t + 30 \Leftrightarrow 80t - 60t = 30 \Leftrightarrow 20t = 30 \Leftrightarrow t = 1,5$$

Le rattrapage a lieu au bout de 1,5 heure, soit 1 h 30 **min**. À cet instant, les deux voitures se trouvent à

$$d_1(1,5) = 80 \times 1,5 = 120 \text{ km}$$

de la ville A. Contrôle :  $d_2(1,5) = 90 + 30 = 120 \text{ km}$  ✓

**Le raisonnement direct.** La première voiture gagne  $80 - 60 = 20 \text{ km}$  par heure sur la seconde. Pour combler les 30 km d'avance, il lui faut  $\frac{30}{20} = 1,5 \text{ heure}$  ✓ Le calcul par l'équation et le raisonnement concordent.

**La conversion de la durée.** 1,5 heure vaut 1 h 30 min, et non « 1 h 5 ». La partie décimale se multiplie par 60.

**L'interprétation graphique.** Les deux droites se coupent au point (1,5 ; 120). Avant ce point, celle de  $d_2$  est au-dessus (la seconde voiture est devant) ; après, c'est celle de  $d_1$  : la première voiture a pris la tête.

**Réponse.** a)  $d_1(t) = 80t$  et  $d_2(t) = 60t + 30$  — b) 80 km et 90 km — c) au bout de 1 h 30 min, à 120 km de A.

### Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une entreprise de livraison

a) La recette additionne le prix par colis et le forfait facturé au client :

$$R(x) = 8x + 45$$

Le coût additionne le coût variable par colis et les charges fixes :

$$C(x) = 3x + 130$$

b) Le bénéfice est la différence :

$$B(x) = (8x + 45) - (3x + 130) = 8x + 45 - 3x - 130 = 5x - 85$$

C'est une fonction **affine**, de coefficient directeur 5 et d'ordonnée à l'origine  $-85$ .

c) Pour 10 colis :

$$B(10) = 50 - 85 = -35$$

soit une **perte** de 35 €. Pour 30 colis :

$$B(30) = 150 - 85 = 65 \text{ €}$$

de bénéfice.

d) Le seuil de rentabilité annule le bénéfice :

$$5x - 85 = 0 \Leftrightarrow 5x = 85 \Leftrightarrow x = 17$$

Il faut livrer 17 **colis** pour couvrir exactement les frais.

e) Pour un bénéfice d'au moins 200 € :

$$5x - 85 \geq 200 \Leftrightarrow 5x \geq 285 \Leftrightarrow x \geq 57$$

Il faut livrer au moins 57 **colis**. Contrôle :  $B(57) = 285 - 85 = 200 \text{ €}$  ✓

Pour un bénéfice **strictement supérieur** à 500 € :

$$5x - 85 > 500 \Leftrightarrow 5x > 585 \Leftrightarrow x > 117$$

Il faut livrer au moins 118 **colis** ( $B(117) = 500 \text{ €}$  exactement, ce qui ne dépasse pas 500 €, et  $B(118) = 505 \text{ €}$  ✓).

**L'interprétation des deux coefficients du bénéfice.** Le 5 est la **marge** par colis (8 € facturés moins 3 € de coût). Le  $-85$  est le déficit fixe de départ : 130 € de charges moins 45 € de forfait facturé. Il faut donc  $\frac{85}{5} = 17$  colis pour l'effacer, ce qui redonne le seuil.

**La différence entre les deux dernières questions.** « Au moins 200 € » est une inégalité **large** : 57 colis conviennent. « Dépasser 500 € » est **stricte** : 117 colis ne suffisent pas, il en faut 118. Lire attentivement le mot employé fait la différence d'un colis.

**Le bilan de la plaquette.** Part fixe et part proportionnelle, c'est  $p$  et  $m$ . Ensuite, trois gestes : calculer une image, résoudre une équation, résoudre une inéquation — puis revenir au contexte, avec l'unité et le bon arrondi.

**Réponse.** a)  $R(x) = 8x + 45$  et  $C(x) = 3x + 130$  — b)  $B(x) = 5x - 85$ , fonction affine — c)  $-35 \text{ €}$  puis  $+65 \text{ €}$  — d) 17 colis — e) au moins 57 colis pour 200 €, et 118 colis pour dépasser 500 €.