

Plaquette 4 - Variations, signe, équations et inéquations

Fonctions affines — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Variations, signe et résolution pour une fonction affine.

- **Sens de variation.** Pour $f(x) = mx + p$ définie sur $\mathbb{R}$:

$m > 0$: f est croissante $m < 0$: f est décroissante $m = 0$: f est constante

Le sens ne dépend **que** du signe de m : p n'y joue aucun rôle.

- **Le zéro de la fonction.** Si $m \neq 0$, l'équation $mx + p = 0$ a une **unique** solution :

$$x_0 = -\frac{p}{m}$$

- **Tableau de signes.** Après x_0 , $f(x)$ est du **signe de m** ; avant, du signe contraire.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
si $m > 0$		-	0	+	
si $m < 0$		+	0	-	

- **Résoudre une inéquation du premier degré.** On isole x comme dans une équation, **mais** diviser (ou multiplier) les deux membres par un nombre **négatif** change le sens de l'inégalité :

$$-2x \geq 6 \Leftrightarrow x \leq -3$$

- **Comparer deux fonctions affines.** $f(x) \geq g(x)$ se ramène à $f(x) - g(x) \geq 0$: c'est encore une inéquation du premier degré.
- **Signe d'un produit.** Pour $(ax + b)(cx + d)$, on dresse un tableau avec **les deux** zéros, on étudie le signe de chaque facteur, puis on multiplie colonne par colonne.
- **Encadrer $f(x)$ sur $[a ; b]$.** La fonction étant monotone, ses valeurs sont comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ — dans cet ordre si $m > 0$, dans l'ordre inverse si $m < 0$.
- **Le test final.** Après toute inéquation, on remplace une valeur de l'ensemble trouvé dans l'inéquation de départ. Si elle n'est pas vérifiée, le sens a été inversé.

Correction de l'exercice 1 - Sens de variation et signe de m

Le sens de variation d'une fonction affine ne dépend que du **signe de m** .

- $m = 5 > 0$: la fonction f est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
- $m = -0,3 < 0$: la fonction g est **décroissante**. Le coefficient est petit en valeur absolue, donc la décroissance est lente — mais elle est bien réelle.
- $m = 0$: la fonction h est **constante**. Toutes les images valent 4, la droite est horizontale.
- Il faut d'abord réécrire l'expression sous la forme $mx + p$:

$$k(x) = \frac{2}{3} - \frac{x}{3} = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Donc $m = -\frac{1}{3} < 0$: la fonction k est **décroissante**.

Le piège de la question d). Sous la forme $\frac{2-x}{3}$, on ne voit pas immédiatement le signe

de m . Il faut **séparer** la fraction, ou remarquer que le x est précédé d'un signe moins au numérateur.

Ce qui ne joue aucun rôle. L'ordonnée à l'origine p n'intervient pas dans le sens de variation : $f(x) = 5x - 2$ et $f(x) = 5x + 1000$ sont toutes deux croissantes. p décide seulement de la **hauteur** de la droite, pas de son inclinaison.

Le contrôle par deux images. Pour b) : $g(0) = 7$ et $g(10) = -3 + 7 = 4$. On a bien $0 < 10$ et $g(0) > g(10)$: l'ordre s'est inversé ✓

Réponse. a) croissante ($m = 5$) — b) décroissante ($m = -0,3$) — c) constante ($m = 0$) — d) décroissante ($m = -\frac{1}{3}$).

Correction de l'exercice 2 - Dresser un tableau de variations

a) Le coefficient directeur vaut $m = -2 < 0$: la fonction f est **décroissante** sur $[-2; 6]$.

b) On calcule les deux valeurs aux bornes :

$$f(-2) = -2 \times (-2) + 5 = 4 + 5 = 9 \quad f(6) = -12 + 5 = -7$$

c) La fonction étant décroissante, elle part de la valeur la plus grande et arrive à la plus petite :

x	-2		6
variations de f	9	décroissante	-7

Comme f est monotone sur l'intervalle, toutes ses valeurs sont comprises entre celles des bornes :

$$-7 \leq f(x) \leq 9 \quad \text{pour tout } x \in [-2; 6]$$

Le **maximum** est 9, atteint en $x = -2$, et le **minimum** est -7 , atteint en $x = 6$: pour une fonction décroissante, les deux extremums sont **aux bornes**, dans cet ordre.

Le piège de l'encadrement. Écrire $9 \leq f(x) \leq -7$ n'a aucun sens : dans un encadrement, la plus **petite** valeur est toujours à gauche. On range les deux bornes après les avoir calculées, sans supposer que $f(a)$ est le minimum.

Le contrôle par une valeur intérieure. $f(0) = 5$, et l'on a bien $-7 \leq 5 \leq 9$ ✓

Pourquoi c'est si simple pour une fonction affine. Elle est monotone sur **tout** intervalle : il n'y a jamais de changement de sens, donc jamais d'extremum « au milieu ». Deux calculs suffisent.

Réponse. a) décroissante car $m = -2 < 0$ — b) $f(-2) = 9$ et $f(6) = -7$ — c) décroissante de 9 à -7 , et $-7 \leq f(x) \leq 9$.

Correction de l'exercice 3 - Comparer sans calculer

a) Le coefficient de f est $m = 3 > 0$: la fonction est **croissante**, elle conserve l'ordre. Comme $2 < 7$:

$$f(2) < f(7)$$

(Contrôle : $f(2) = 5$ et $f(7) = 20$ ✓)

b) Le coefficient de g est $m = -4 < 0$: la fonction est **décroissante**, elle inverse l'ordre. Comme $-3 < 5$:

$$g(-3) > g(5)$$

(Contrôle : $g(-3) = 12 + 2 = 14$ et $g(5) = -20 + 2 = -18$ ✓)

c) La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier, y compris sur les négatifs. Comme

$$-10 < -9,5 :$$

$$f(-10) < f(-9,5)$$

(Contrôle : $f(-10) = -31$ et $f(-9,5) = -29,5$, et l'on a bien $-31 < -29,5$ ✓)

Le point de vigilance en c). Comparer -10 et $-9,5$: c'est -10 qui est le **plus petit**, car sur les négatifs, plus le nombre « paraît grand » plus il est petit. Une erreur ici inverse toute la conclusion, alors que le raisonnement sur la fonction est correct.

L'avantage sur les fonctions quelconques. Une fonction affine est monotone sur $\mathbb{R}$ **entier** : on peut comparer n'importe quelles deux images, sans se demander si les nombres sont « du même côté » d'un changement de sens. C'est beaucoup plus simple qu'avec une parabole.

La rédaction attendue. Une phrase suffit : « $m = 3 > 0$ donc f est croissante, et $2 < 7$, donc $f(2) < f(7)$. » C'est cette justification qui est notée, pas le calcul des images.

Réponse. a) $f(2) < f(7)$ — b) $g(-3) > g(5)$ — c) $f(-10) < f(-9,5)$.

Correction de l'exercice 4 - Tableau de signes avec m positif

a) On résout l'équation du premier degré :

$$4x - 12 = 0 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$$

Le zéro de la fonction est $x_0 = 3$.

b) Le coefficient directeur est $m = 4 > 0$: la fonction est **croissante**, donc négative avant son zéro et positive après.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $f(x)$		-	0	+	

c) On lit directement dans le tableau :

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 3 \quad \text{donc} \quad S =]3 ; +\infty[$$

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3 \quad \text{donc} \quad S =]-\infty ; 3]$$

Les crochets suivent la nature de l'inégalité : ouvert pour une inégalité **stricte**, fermé pour une inégalité **large**.

La règle en une phrase. Une fonction affine est du **signe de m** après son zéro. Ici $m > 0$, donc positive à droite de 3 — et négative à gauche.

Le contrôle par deux valeurs. On teste un nombre de chaque côté : $f(0) = -12 < 0$ ✓ (avant 3) et $f(5) = 8 > 0$ ✓ (après 3). Deux tests valident tout le tableau.

Le lien graphique. La droite coupe l'axe des abscisses en $x = 3$ et **monte** : elle est donc sous l'axe avant, au-dessus après. Le tableau de signes n'est que la traduction de ce dessin.

Réponse. a) $x = 3$ — b) négatif avant 3, nul en 3, positif après — c) $]3 ; +\infty[$ puis $]-\infty ; 3]$.

Correction de l'exercice 5 - Tableau de signes avec m négatif

a) On résout :

$$-3x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$$

Le zéro est $x_0 = 3$, comme dans l'exercice précédent — mais le signe va s'inverser.

b) Le coefficient directeur est $m = -3 < 0$: la fonction est **décroissante**, donc positive avant son zéro et négative après.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $g(x)$		+	0	-	

c) On lit dans le tableau : $g(x) \geq 0$ pour $x \leq 3$, donc

$$S =]-\infty ; 3]$$

Vérification par le calcul direct, pour s'assurer du sens :

$$-3x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -9$$

On divise les deux membres par -3 , ce qui **change le sens** de l'inégalité :

$$x \leq 3 \quad \checkmark$$

La comparaison avec l'exercice précédent. Même zéro, mais signes **opposés** : c'est le signe de m qui décide, pas la valeur de x_0 . Retenir « négatif puis positif » sans regarder m conduit à se tromper une fois sur deux.

Le contrôle par une valeur. On teste $x = 0$: $g(0) = 9 \geq 0 \quad \checkmark$ et 0 appartient bien à $]-\infty ; 3]$. Si l'on avait répondu $[3 ; +\infty[$, ce test l'aurait immédiatement réfuté.

Réponse. a) $x = 3$ — b) positif avant 3, nul en 3, négatif après — c) $S =]-\infty ; 3]$.

Correction de l'exercice 6 - Résoudre des équations du premier degré

a) On regroupe les termes en x d'un côté, les constantes de l'autre :

$$5x - 7 = 2x + 8 \Leftrightarrow 5x - 2x = 8 + 7 \Leftrightarrow 3x = 15 \Leftrightarrow x = 5$$

Contrôle : $5 \times 5 - 7 = 18$ et $2 \times 5 + 8 = 18 \quad \checkmark$

b) On développe d'abord le membre de gauche :

$$3x - 6 = 4x + 1 \Leftrightarrow 3x - 4x = 1 + 6 \Leftrightarrow -x = 7 \Leftrightarrow x = -7$$

Contrôle : $3 \times (-7 - 2) = 3 \times (-9) = -27$ et $4 \times (-7) + 1 = -27 \quad \checkmark$

c) On multiplie les deux membres par 6, plus petit commun multiple de 2 et 3, pour éliminer les dénominateurs :

$$6 \times \left(\frac{x}{2} + 1 \right) = 6 \times \left(\frac{x}{3} + 3 \right) \Leftrightarrow 3x + 6 = 2x + 18$$

Puis :

$$3x - 2x = 18 - 6 \Leftrightarrow x = 12$$

Contrôle : $\frac{12}{2} + 1 = 7$ et $\frac{12}{3} + 3 = 7 \quad \checkmark$

Le piège de la question b). De $-x = 7$ on tire $x = -7$, et non $x = 7$: il faut multiplier les deux membres par -1 . C'est l'erreur la plus fréquente quand le coefficient de x devient négatif.

Le réflexe des fractions. Multiplier par un dénominateur commun **avant** de regrouper évite de manipuler des fractions tout au long du calcul. On choisit le plus petit commun multiple des dénominateurs.

Le contrôle systématique. On remplace la solution dans l'équation **de départ**, pas dans une ligne intermédiaire : une erreur commise dès la première étape passerait inaperçue.

Réponse. a) $x = 5$ — b) $x = -7$ — c) $x = 12$.

Correction de l'exercice 7 - Résoudre des inéquations

a) On isole x en ajoutant 5 puis en divisant par 2, qui est **positif** : le sens ne change pas.

$$2x - 5 > 7 \Leftrightarrow 2x > 12 \Leftrightarrow x > 6$$

$$S =]6; +\infty[$$

b) On regroupe les x à gauche, les constantes à droite :

$$4x + 3 \leq x - 6 \Leftrightarrow 4x - x \leq -6 - 3 \Leftrightarrow 3x \leq -9 \Leftrightarrow x \leq -3$$

La division par 3 (positif) conserve le sens.

$$S =]-\infty; -3]$$

c) Ici le coefficient de x devient **négatif** :

$$-3x + 2 < 11 \Leftrightarrow -3x < 9$$

On divise par -3 , ce qui **change le sens** de l'inégalité :

$$x > -3 \quad \text{donc} \quad S =]-3; +\infty[$$

Le test qui sauve. Pour c), on vérifie avec une valeur de l'ensemble trouvé, par exemple $x = 0$:

$$-3 \times 0 + 2 = 2 < 11 \quad \checkmark$$

et avec une valeur hors de l'ensemble, $x = -5$: $15 + 2 = 17$, qui n'est pas < 11 ✓ Le sens est bon.

Si l'on avait oublié de retourner l'inégalité, on aurait répondu $x < -3$, et le test avec $x = 0$ l'aurait immédiatement contredit.

La seule règle à retenir. Ajouter ou soustraire ne change jamais le sens. Multiplier ou diviser par un nombre **positif** ne le change pas non plus. Par un nombre **négatif**, le sens s'inverse — toujours.

Réponse. a) $S =]6; +\infty[$ — b) $S =]-\infty; -3]$ — c) $S =]-3; +\infty[$.

Correction de l'exercice 8 - Le piège de la division par un négatif

a) On remplace x par 0 dans l'inéquation de départ :

$$-2 \times 0 + 1 = 1$$

Or $1 \geq 7$ est **faux** : le nombre 0 n'est **pas** solution.

b) Non, l'élève a tort. Sa réponse $x \geq -3$ contient 0, qui vient d'être écarté : son ensemble de solutions est donc faux.

Son erreur : il a divisé par -2 **sans changer le sens** de l'inégalité.

c) On résout correctement :

$$-2x + 1 \geq 7 \Leftrightarrow -2x \geq 6$$

On divise les deux membres par -2 , ce qui **retourne** l'inégalité :

$$x \leq -3 \quad \text{donc} \quad S =]-\infty; -3]$$

Vérification. On teste $x = -5$, qui appartient à l'ensemble : $10 + 1 = 11 \geq 7$ ✓ Et $x = 0$, qui n'y appartient pas : $1 \geq 7$ est faux ✓ Tout concorde.

Pourquoi le sens s'inverse. Multiplier par un négatif renverse l'ordre des nombres : $2 < 5$ mais $-2 > -5$. Comme diviser par -2 revient à multiplier par $-\frac{1}{2}$, l'ordre est renversé lui aussi.

La méthode sans risque. On peut éviter complètement le problème en gardant le coefficient de x positif : de $-2x + 1 \geq 7$, on passe à $1 - 7 \geq 2x$, soit $-6 \geq 2x$, donc $-3 \geq x$, c'est-à-dire $x \leq -3$ ✓ Même résultat, sans aucune division par un négatif.

Réponse. a) non, $1 \geq 7$ est faux — b) non : il a oublié de changer le sens en divisant par -2 — c) $S =]-\infty; -3]$.

Correction de l'exercice 9 - Comparer deux fonctions affines

a) On résout l'équation :

$$3x - 4 = -x + 8 \Leftrightarrow 3x + x = 8 + 4 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$$

Les deux fonctions prennent la même valeur en $x = 3$. Cette valeur commune est $f(3) = 9 - 4 = 5$ (ou $g(3) = -3 + 8 = 5$ ✓).

b) On résout l'inéquation, en regroupant les x du côté où le coefficient restera positif :

$$3x - 4 > -x + 8 \Leftrightarrow 3x + x > 8 + 4 \Leftrightarrow 4x > 12 \Leftrightarrow x > 3$$

Aucune division par un négatif ici, le sens est conservé.

$$S =]3; +\infty[$$

c) Graphiquement, les deux droites se **coupent** au point $(3; 5)$ — c'est la réponse à la question a).

Et $f(x) > g(x)$ signifie que la droite de f est **au-dessus** de celle de g : c'est le cas à **droite** du point d'intersection, pour $x > 3$.

C'est cohérent avec les pentes : f a le coefficient le plus grand (3 contre -1), donc sa droite finit par passer au-dessus.

La méthode générale. Comparer deux fonctions, c'est étudier le **signe de leur différence** :

$$f(x) - g(x) = (3x - 4) - (-x + 8) = 4x - 12$$

Cette différence est une fonction affine de coefficient $4 > 0$, qui s'annule en 3 : elle est donc négative avant, positive après — ce qui redonne les deux réponses d'un coup.

Le contrôle par une valeur. En $x = 0$: $f(0) = -4$ et $g(0) = 8$, donc $f(0) < g(0)$ ✓ et 0 n'appartient pas à $]3; +\infty[$.

Réponse. a) $x = 3$ (valeur commune 5) — b) $S =]3; +\infty[$ — c) les droites se coupent en $(3; 5)$, et celle de f est au-dessus à droite de ce point.

Correction de l'exercice 10 - Signe d'un produit de deux expressions affines

a) Un produit est nul si l'un de ses facteurs l'est :

$$2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ou} \quad x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Les deux zéros sont donc -1 et 3 .

b) On dresse un tableau avec les deux zéros rangés dans l'ordre croissant, une ligne par facteur, et une ligne pour le produit.

Chaque facteur a un coefficient **positif**, donc chacun est négatif avant son zéro et positif après.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$2x - 6$		-	-	-	0	+	
$x + 1$		-	0	+	+	+	
$P(x)$		+	0	-	0	+	

La dernière ligne s'obtient en **multipliant** les signes colonne par colonne : deux - donnent +, un - et un + donnent -.

c) On lit les intervalles où le produit est négatif ou nul :

$$S = [-1; 3]$$

Le contrôle par trois valeurs. On teste un nombre dans chaque zone :

$$P(-2) = (-10)(-1) = 10 > 0 \quad \checkmark \quad P(0) = (-6)(1) = -6 < 0 \quad \checkmark \quad P(4) = (2)(5) = 10 > 0 \quad \checkmark$$

Les trois signes correspondent au tableau.

L'erreur à ne pas commettre. Développer $P(x)$ pour obtenir $2x^2 - 4x - 6$ puis chercher le signe : on perdrait l'information des facteurs, et l'on ne saurait plus étudier le signe en Seconde. La **forme factorisée** est précisément celle qui permet le tableau.

La règle du produit de signes. Le signe alterne à chaque zéro simple. C'est pourquoi un produit de deux facteurs affines donne toujours la suite $+, -, +$ ou $-, +, -$ selon les coefficients.

Réponse. a) $x = -1$ et $x = 3$ — b) $+, 0, -, 0, +$ — c) $S = [-1; 3]$.

Correction de l'exercice 11 - Un produit avec un facteur décroissant

a) On annule chaque facteur :

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad -3x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

Les zéros sont 1 et 2.

b) Attention : le **second facteur a un coefficient négatif** (-3), il est donc positif **avant** son zéro et négatif après — contrairement au premier.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x - 2$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$-3x + 3$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$Q(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) On lit les intervalles où le produit est strictement positif :

$$S =]1; 2[$$

Le contrôle par trois valeurs.

$$Q(0) = (-2)(3) = -6 < 0 \quad \checkmark \quad Q(1,5) = (-0,5)(-1,5) = 0,75 > 0 \quad \checkmark \quad Q(3) = (1)(-6) = -6 < 0 \quad \checkmark$$

L'erreur classique. Remplir la ligne du second facteur comme celle du premier, c'est-à-dire « $-$ puis $+$ ». Il faut regarder le **signe du coefficient de x** dans **chaque** facteur, séparément. Ici $-3 < 0$ inverse la ligne.

Le raccourci de vérification. Un produit de deux facteurs dont l'un croît et l'autre décroît a un coefficient dominant **négatif** : $Q(x) = -3x^2 + \dots$ En développant, on trouve $-3x^2 + 9x - 6$, de coefficient dominant $-3 < 0$. Le signe aux extrémités du tableau est donc bien $-$ des deux côtés $\checkmark$

Réponse. a) $x = 1$ et $x = 2$ — b) $-, 0, +, 0, -$ — c) $S =]1; 2[$.

Correction de l'exercice 12 - Encadrer une image sur un intervalle

a) On calcule les deux images aux bornes :

$$f(-1) = 5 + 3 = 8 \quad f(4) = -20 + 3 = -17$$

b) Le coefficient $m = -5$ est **négatif**, donc f est décroissante : quand x passe de -1 à 4 , l'image passe de 8 à -17 en **diminuant**. Toutes les valeurs sont donc comprises entre -17 et 8 :

$$-17 \leq f(x) \leq 8$$

On peut aussi l'obtenir en transformant l'encadrement de départ. De $-1 \leq x \leq 4$, on multiplie par -5 en **retournant** les inégalités :

$$5 \geq -5x \geq -20 \quad \text{soit} \quad -20 \leq -5x \leq 5$$

puis on ajoute 3 :

$$-17 \leq -5x + 3 \leq 8 \quad \checkmark$$

c) Non pour 10 : d'après l'encadrement, $f(x) \leq 8 < 10$. La valeur 10 n'est jamais atteinte sur $[-1; 4]$.

Non non plus pour -20 : on a $f(x) \geq -17 > -20$.

Le piège du retournement. En multipliant l'encadrement par un nombre **négatif**, les deux inégalités changent de sens **et** les bornes échangent leurs places. Oublier l'un des deux gestes donne un encadrement faux, souvent « à l'envers ».

La méthode la plus sûre. Calculer les deux images aux bornes, puis les ranger du plus petit au plus grand. La monotonie garantit qu'il n'y a rien en dehors, et l'on évite toute manipulation d'inégalité.

Le contrôle par une valeur intérieure. $f(0) = 3$, et $-17 \leq 3 \leq 8 \quad \checkmark$

Réponse. a) $f(-1) = 8$ et $f(4) = -17$ — b) $-17 \leq f(x) \leq 8$ — c) non dans les deux cas : $10 > 8$ et $-20 < -17$.

Correction de l'exercice 13 - Une inéquation en contexte

a) Le coût est la part fixe augmentée du prix par séance :

$$C(x) = 2,50x + 29$$

b) La contrainte « ne pas dépasser 50 € » se traduit par $C(x) \leq 50$:

$$2,50x + 29 \leq 50 \Leftrightarrow 2,50x \leq 21 \Leftrightarrow x \leq \frac{21}{2,50} = 8,4$$

La division par 2,50, qui est positif, ne change pas le sens de l'inégalité.

c) Le nombre de séances est un **entier**, et la contrainte est de **ne pas dépasser** 50 € : il faut donc le plus grand entier inférieur à 8,4, soit 8 **séances**.

Contrôle des deux entiers voisins :

$$C(8) = 20 + 29 = 49 \text{ €} \leq 50 \quad \checkmark \quad C(9) = 22,50 + 29 = 51,50 \text{ €} > 50 \quad \times$$

Le sens de l'arrondi. « Ne pas dépasser » impose d'arrondir **vers le bas**. Arrondir 8,4 à 8 « au plus proche » donne ici la bonne réponse, mais par hasard : si le calcul avait donné 8,6, l'arrondi au plus proche aurait conduit à 9 séances, soit un dépassement du budget.

La règle générale. « Au plus », « ne pas dépasser », « budget maximal » : on arrondit vers le **bas**. « Au moins », « atteindre », « dépasser » : on arrondit vers le **haut**. Et dans les deux cas, on teste les deux entiers voisins.

Le contrôle de vraisemblance. Il reste $50 - 29 = 21$ € pour les séances, à 2,50 € l'unité : $\frac{21}{2,50} = 8,4$, donc 8 séances complètes et 1 € non dépensé $\checkmark$

Réponse. a) $C(x) = 2,50x + 29$ — b) $2,50x + 29 \leq 50$, soit $x \leq 8,4$ — c) au maximum 8 séances (49 €).

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux sur les variations et le signe

a) **Vrai.** Si $m > 0$, la fonction croît indéfiniment : en résolvant $mx + p > 0$, on obtient $x > -\frac{p}{m}$. Tout nombre supérieur à ce seuil donne une image positive, donc $f(x) > 0$ dès que x est assez grand.

b) **Faux** en général. Une fonction affine non constante s'annule en $x_0 = -\frac{p}{m}$ et change de signe en ce point : elle est négative d'un côté, positive de l'autre.

L'affirmation n'est vraie que dans deux cas : si f est **constante** non nulle (signe fixe), ou si l'on se restreint à un intervalle ne contenant pas x_0 .

c) **Faux**. Le signe de m donne le sens de **variation**, pas le signe de la fonction.

Contre-exemple : $f(x) = -2x + 10$ a $m = -2 < 0$, mais $f(0) = 10 > 0$.

Ce que $m < 0$ permet de dire, c'est que f est négative **après** son zéro (ici après $x = 5$) et positive avant.

d) **Vrai**. L'équation $mx + p = 0$ s'écrit $mx = -p$, et comme $m \neq 0$ elle a l'unique solution

$$x_0 = -\frac{p}{m}$$

Graphiquement : une droite non horizontale coupe l'axe des abscisses en exactement un point.

La confusion à éliminer. « Variation » et « signe » sont deux notions distinctes. Le signe de m décide de la variation ; le signe de $f(x)$ dépend en plus de la position de x par rapport au zéro x_0 . Les questions a) et c) portent précisément sur cette distinction.

Le cas exclu par d). Si $m = 0$, la fonction est constante : elle ne s'annule **jamais** (si $p \neq 0$) ou **partout** (si $p = 0$). C'est pourquoi l'énoncé précise « non constante ».

Réponse. a) vrai — b) faux, elle change de signe en $-\frac{p}{m}$ — c) faux, m donne la variation, pas le signe — d) vrai, une seule fois en $-\frac{p}{m}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : étude complète d'une fonction affine

a) Le coefficient directeur vaut $m = -4 < 0$: la fonction f est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.

b) On résout l'équation :

$$-4x + 10 = 0 \Leftrightarrow 4x = 10 \Leftrightarrow x = 2,5$$

Comme $m < 0$, la fonction est positive **avant** son zéro et négative après :

x	$-\infty$		2,5		$+\infty$
signe de $f(x)$		+	0	-	

Contrôle : $f(0) = 10 > 0$ ✓ et $f(3) = -2 < 0$ ✓

c) On résout l'inéquation :

$$-4x + 10 \geq 6 \Leftrightarrow -4x \geq -4$$

On divise par -4 , ce qui **retourne** l'inégalité :

$$x \leq 1 \quad \text{donc} \quad S =]-\infty ; 1]$$

Contrôle : $f(0) = 10 \geq 6$ ✓ et $0 \in]-\infty ; 1]$; $f(2) = 2$, qui n'est pas ≥ 6 , et $2 \notin S$ ✓

d) On calcule les images aux bornes : $f(0) = 10$ et $f(3) = -12 + 10 = -2$. La fonction étant décroissante, elle passe de 10 à -2 , donc

$$-2 \leq f(x) \leq 10 \quad \text{pour tout } x \in [0 ; 3]$$

e) On résout l'inéquation, en regroupant les x du côté où le coefficient sera positif :

$$-4x + 10 \leq 2x - 8 \Leftrightarrow 10 + 8 \leq 2x + 4x \Leftrightarrow 18 \leq 6x \Leftrightarrow 3 \leq x$$

$$S = [3 ; +\infty[$$

Aucune division par un négatif n'a été nécessaire.

Interprétation graphique. Les deux droites se coupent au point d'abscisse 3, d'ordonnée $f(3) = -2$ (ou $g(3) = -2$ ✓), soit $I(3 ; -2)$. Et $f(x) \leq g(x)$ signifie que la droite de

f est **en dessous** de celle de g : c'est le cas à **droite** de I , ce qui est cohérent avec les pentes ($-4 < 2$, donc f finit par passer sous g).

Le bilan de la plaquette. Tout part du signe de m : il donne le **sens de variation**. Le zéro $-\frac{p}{m}$ donne le **tableau de signes**. Les inéquations se résolvent comme les équations, avec la seule précaution du **retournement** en cas de division par un négatif. Et l'on termine toujours par un **test de valeur**.

Réponse. a) décroissante ($m = -4 < 0$) — b) $x = 2,5$; positif avant, négatif après — c) $S =]-\infty ; 1]$ — d) $-2 \leq f(x) \leq 10$ — e) $S = [3 ; +\infty[$; les droites se coupent en $I(3 ; -2)$.