MATHÉMATIQUES

Fonctions affines

Seconde

Fonction affine • Fonction linéaire • Taux d'accroissement • Ordonnée à l'origine
Droite représentative • Variations • Signe • Modélisation

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques de seconde générale et technologique** (arrêté du 26 février 2026, BO n°14 du 2 avril 2026, rentrée 2026). Il couvre :

- fonctions affines $f(x) = mx + p$ et linéaires, droite représentative (automatisme réactivé du collège) ;
- interprétation de m comme **taux d'accroissement** et de p comme **ordonnée à l'origine** ;
- variations d'une fonction affine selon le signe de m (**démonstration** au programme) ;
- signe d'une fonction affine, lien entre sens de variation, signe et droite ;
- résolution d'équations et d'inéquations $f(x) = k$, $f(x) < k$, modélisation de situations.

Objectif : reconnaître une fonction affine, interpréter m et p, et relier sens de variation, signe et droite représentative.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Fonctions affines et linéaires **3**

2 Représentation graphique **4**

3 Le coefficient m : un taux d'accroissement **4**

4 Variations d'une fonction affine **5**

5 Signe d'une fonction affine **6**

6 Équations, inéquations et modélisation **6**

7 Erreurs classiques **7**

8 Fiche de synthèse **7**

9 Exercices d'application **8**

10 Corrigés des exercices **8**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Fonctions affines et linéaires

Fonction affine

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est **affine** s'il existe deux réels m et p tels que, pour tout réel x,

$$f(x) = mx + p.$$

— Si $p = 0$, $f(x) = mx$: f est **linéaire** (situation de proportionnalité).
— Si $m = 0$, $f(x) = p$: f est **constante**.

Reconnaître une fonction affine

— $f(x) = 3 - 2x$ est affine avec $m = -2$ et $p = 3$.
— $g(x) = \dfrac{x}{4}$ est linéaire, $m = \dfrac{1}{4}$.
— $h(x) = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$ est affine, même si l'expression de départ contient des carrés.
— $k(x) = \dfrac{2}{x}$ et $q(x) = x^2 + 1$ ne sont pas affines.

Développer avant de conclure

Une expression peut cacher une fonction affine (comme h ci-dessus) ou, au contraire, ressembler à une fonction affine sans en être une : $u(x) = 2(x-1) + x^2$ contient un x^2 qui ne disparaît pas.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Représentation graphique

Droite représentative

Dans un repère, la courbe représentative de la fonction affine $f(x) = mx + p$ est une **droite** non parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $y = mx + p$.

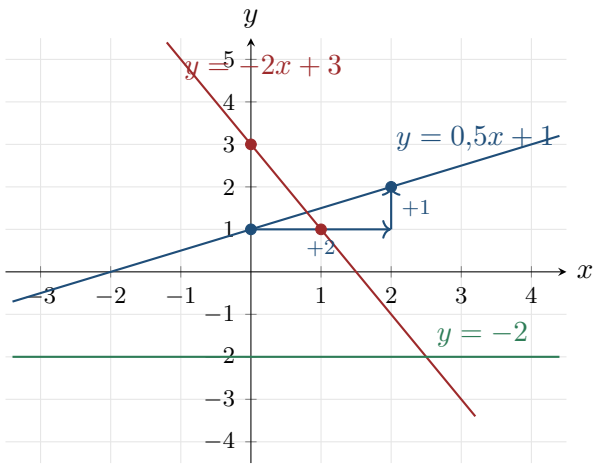
— p est l'**ordonnée à l'origine** : la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0\,;p)$.

— m est le **coefficient directeur** (ou **pente**) de la droite.

— Une fonction linéaire est représentée par une droite passant par l'origine.

Tracer la droite de $f(x) = mx + p$

Deux points suffisent. On place $(0\,;p)$, puis on calcule une autre image (pour une abscisse « simple »), et on contrôle avec un troisième point.



Trois droites : pente 0,5 (montante), pente -2 (descendante), pente 0 (horizontale).

3. Le coefficient m : un taux d'accroissement

Accroissements proportionnels

Soit $f(x) = mx + p$. Pour tous réels $x_1 \neq x_2$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m.$$

L'accroissement des images est proportionnel à l'accroissement des abscisses : quand x augmente de 1, $f(x)$ augmente de m (ou diminue de $|m|$ si $m < 0$).

Démonstration. $f(x_2)-f(x_1) = (mx_2+p)-(mx_1+p) = m(x_2-x_1)$. On divise par $x_2-x_1 \neq 0$.

Déterminer f à partir de deux images

On connaît $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$ avec $x_1 \neq x_2$.

1. Calculer $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Trouver p avec $y_1 = mx_1 + p$, soit $p = y_1 - mx_1$.
3. Vérifier avec le second point.

Une fonction affine telle que $f(2) = 7$ et $f(6) = -1$

$m = \dfrac{-1-7}{6-2} = \dfrac{-8}{4} = -2$, puis $p = 7 - (-2) \times 2 = 11$. Donc $f(x) = -2x + 11$. Vérification : $f(6) = -12 + 11 = -1$.

Lire m et p sur un graphique

p se lit à l'intersection avec l'axe des ordonnées. Pour m, on part d'un point de la droite, on avance de 1 (ou de n) unités vers la droite et on mesure le déplacement vertical nécessaire pour revenir sur la droite : $m = \dfrac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$. Sur la figure, la droite bleue monte de 1 quand on avance de 2 : $m = \dfrac{1}{2}$.

4. Variations d'une fonction affine

Sens de variation

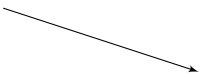
Soit $f(x) = mx + p$.

- Si $m > 0$, f est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$;
- si $m < 0$, f est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$;
- si $m = 0$, f est **constante** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration au programme. Soit $a < b$. D'après le théorème précédent, $f(b) - f(a) = m(b-a)$, avec $b - a > 0$.

- Si $m > 0$, le produit est strictement positif : $f(a) < f(b)$, l'ordre est conservé.
- Si $m < 0$, il est strictement négatif : $f(a) > f(b)$, l'ordre est inversé.
- Si $m = 0$, il est nul : $f(a) = f(b)$.

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$mx + p$, $m > 0$	

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$mx + p$, $m < 0$	

Lien avec les inégalités

Multiplier une inégalité par un nombre **positif** conserve son sens, par un nombre **négatif** l'inverse : c'est exactement le sens de variation de $x \mapsto mx$. Par exemple, $a < b \implies -3a > -3b$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

5. Signe d'une fonction affine

Signe de $mx+p$ avec $m \neq 0$

$mx+p$ s'annule pour $x_0 = -\dfrac{p}{m}$ et change de signe en x_0 : il a le **signe de m à droite** de x_0 et le signe contraire à gauche.

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$mx+p$, $m>0$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$mx+p$, $m<0$		$+$	0	$-$	

Démonstration. Pour $m>0$: f est croissante et $f(x_0)=0$, donc $f(x)<0$ pour $x<x_0$ et $f(x)>0$ pour $x>x_0$. Pour $m<0$, la décroissance inverse les signes.

Signe de $f(x) = -2x+5$

$-2x+5=0 \iff x=2{,}5$. Comme $m=-2<0$, $f(x)$ est positif avant 2,5 et négatif après :

x	$-\infty$		$2{,}5$		$+\infty$
$-2x+5$		$+$	0	$-$	

Contrôle : $f(0)=5>0$, cohérent avec « + » à gauche de 2,5.

Relier sens de variation, signe et droite

Pour $f(x)=mx+p$:

- la droite **monte** si $m>0$, **descend** si $m<0$;
- elle coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $-\frac{p}{m}$;
- $f(x)>0$ là où la droite est au-dessus de l'axe des abscisses.

6. Équations, inéquations et modélisation

Résoudre $mx+p<k$

On isole x ; si l'on divise par un nombre négatif, on **change le sens** de l'inégalité.

$$-3x+4<10 \iff -3x<6 \iff x>-2.$$

Graphiquement : les abscisses des points de la droite $y=-3x+4$ situés sous la droite horizontale $y=10$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Comparer deux tarifs

Un loueur de vélos propose deux formules : A, 4 € l'heure ; B, 10 € de forfait plus 2,5 € l'heure. Pour x heures : $A(x) = 4x$ (linéaire) et $B(x) = 2{,}5x + 10$ (affine).

$$A(x) < B(x) \iff 4x < 2{,}5x + 10 \iff 1{,}5x < 10 \iff x < \frac{20}{3} \approx 6{,}67.$$

La formule A est plus avantageuse pour une location de moins de 6 h 40 min ; au-delà, B est meilleure. Le point d'intersection des deux droites a pour abscisse $\frac{20}{3}$.

Reconnaître une situation affine

Une grandeur est fonction affine d'une autre si elle varie **de la même quantité** à chaque augmentation d'une unité de la variable : c'est le taux m. La valeur initiale (quand la variable vaut 0) est p. Une augmentation de 5 % par an n'est **pas** affine : la variation n'est pas constante.

7. Erreurs classiques

À éviter

- Confondre m et p dans $f(x) = 3 - 2x$: $m = -2$, $p = 3$.
- Calculer la pente avec $\dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ (inversée).
- Oublier de changer le sens d'une inégalité en divisant par un négatif.
- Annoncer le signe de $mx + p$ sans regarder le signe de m.
- Croire qu'une droite verticale représente une fonction : un même x aurait une infinité d'images.

8. Fiche de synthèse

Fonction affine	$f(x) = mx + p$; linéaire si $p = 0$, constante si $m = 0$
Droite	$y = mx + p$; passe par $(0\,;p)$
Taux d'accroissement	$m = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
Trouver p	$p = y_1 - mx_1$
Variations	$m > 0$: croissante ; $m < 0$: décroissante ; $m = 0$: constante
Preuve	$f(b) - f(a) = m(b - a)$
Signe	s'annule en $-\frac{p}{m}$, signe de m à droite

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

9. Exercices d'application

Exercice 1 – Lire une expression

Pour chaque fonction, dire si elle est affine et donner m et p : $f(x) = 7 - x$; $g(x) = \dfrac{2x-3}{5}$; $h(x) = x(x+2) - x^2$; $k(x) = \sqrt{x} + 1$.

Exercice 2 – Déterminer une fonction affine

f est affine, $f(-1) = 4$ et $f(3) = -8$. Déterminer $f(x)$, son sens de variation et son tableau de signes.

Exercice 3 – Inéquations

Résoudre : a) $5 - 2x \geq 0$; b) $3x + 1 < x - 7$; c) $-\dfrac{x}{3} + 2 > 4$.

Exercice 4 – Modélisation

Une bougie de 20 cm se consume régulièrement : elle mesure 14 cm après 2 heures.

1. Exprimer sa hauteur $h(t)$ (en cm) en fonction du temps t (en heures).
2. Interpréter m et p. Au bout de combien de temps est-elle entièrement consumée ?
3. Sur quel intervalle de temps mesure-t-elle plus de 5 cm ?

10. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $f(x) = -x + 7$: affine, $m = -1$, $p = 7$. $g(x) = \dfrac{2}{5}x - \dfrac{3}{5}$: affine, $m = 0{,}4$, $p = -0{,}6$. $h(x) = x^2 + 2x - x^2 = 2x$: linéaire, $m = 2$, $p = 0$. k n'est pas affine (racine carrée de x).

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $m = \dfrac{-8-4}{3-(-1)} = \dfrac{-12}{4} = -3$; $p = 4 - (-3)(-1) = 1$. Donc $f(x) = -3x + 1$ (vérification : $f(3) = -9 + 1 = -8$). $m < 0$: f est décroissante sur $\mathbb{R}$. $f(x) = 0 \iff x = \frac{1}{3}$; $f(x) > 0$ pour $x < \frac{1}{3}$ et $f(x) < 0$ pour $x > \frac{1}{3}$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. a) $-2x \geq -5 \iff x \leq 2{,}5$: $S =]-\infty\,;2{,}5]$. b) $2x < -8 \iff x < -4$: $S =]-\infty\,;-4[$. c) $-\dfrac{x}{3} > 2 \iff x < -6$ (on multiplie par -3, le sens change) : $S =]-\infty\,;-6[$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé.

1. La hauteur diminue régulièrement : h est affine. $m = \dfrac{14-20}{2-0} = -3$ et $p = h(0) = 20$, d'où $h(t) = -3t + 20$.
2. $p = 20$: hauteur initiale (cm). $m = -3$: la bougie perd 3 cm par heure. $h(t) = 0 \iff t = \frac{20}{3} \approx 6{,}67$ h, soit 6 h 40 min.
3. $-3t + 20 > 5 \iff -3t > -15 \iff t < 5$: pendant les 5 premières heures, soit $t \in [0\,;5[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).