Plaquette 2 – Courbe représentative et lectures graphiques

Fonctions : généralités — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Lire une fonction sur sa courbe.

— **Définition.** La courbe représentative de f est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;f(x))$ pour x dans l'ensemble de définition. Donc

$$M(x_M\,;y_M)\in C_f \Leftrightarrow y_M=f(x_M)$$

— **Image de** a : on se place en $x=a$, on monte verticalement jusqu'à la courbe, on lit l'ordonnée. **Une seule** valeur.

— **Résoudre** $f(x)=k$: on trace la droite horizontale d'équation $y=k$, et les solutions sont les **abscisses** des points d'intersection avec la courbe. Il peut y en avoir 0, 1, 2 ou plus.

— **Résoudre** $f(x)\geq k$: ce sont les abscisses des points de la courbe situés **au-dessus** (ou sur) la droite $y=k$. Pour $f(x)\leq k$, ceux situés en dessous.

— **Signe de** $f(x)$: c'est le cas particulier $k=0$. La courbe est au-dessus de l'**axe des abscisses** là où $f(x)>0$, en dessous là où $f(x)<0$.

— **Comparer deux fonctions** : $f(x)\geq g(x)$ là où C_f est **au-dessus** de C_g ; les solutions de $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'**intersection** des deux courbes.

— **Intersections avec les axes.** Avec l'axe des ordonnées : le point $(0\,;f(0))$, **au plus un**. Avec l'axe des abscisses : les points $(x\,;0)$ où x est un antécédent de 0, autant qu'il y a d'antécédents.

— **Le test de la verticale.** Une courbe représente une fonction si et seulement si **toute droite verticale** la coupe au plus une fois — sinon un même x aurait deux images.

— ⚠ **Toujours les abscisses.** Les solutions d'une équation ou d'une inéquation sont des valeurs de x : on lit des **abscisses**, jamais les ordonnées des points trouvés.

Correction de l'exercice 1 – Lire des images sur une courbe

Pour lire une image, on part de l'abscisse sur l'axe horizontal, on se déplace **verticalement** jusqu'à rencontrer la courbe, puis on lit l'ordonnée sur l'axe vertical.

a) Les trois lectures :

$$f(-2)=2 \qquad f(0)=-2 \qquad f(2)=2$$

On remarque que $f(-2)=f(2)$: la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) Au-dessus de $x=-1$, la courbe est à la hauteur -1 : l'ordonnée du point cherché est -1, c'est-à-dire $f(-1)=-1$.

c) Le point d'abscisse 1 de la courbe a pour ordonnée $f(1)=-1$, et non -2. Le point $A(1\,;-2)$ **n'appartient donc pas** à la courbe : il se situe une unité plus bas.

$$A\in C_f \Leftrightarrow y_A=f(x_A)$$

Le contrôle par le calcul. La fonction représentée est $f(x)=x^2-2$. On vérifie $f(-2)=4-2=2$ ✓, $f(0)=-2$ ✓ et $f(1)=1-2=-1$ ✓ : les lectures sont exactes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Le réflexe pour la question c). On ne regarde pas « si le point a l'air d'être sur la courbe » : on calcule ou on lit l'image de son abscisse, et on compare à son ordonnée.

Réponse. a) $f(-2) = 2$, $f(0) = -2$, $f(2) = 2$ — b) -1 — c) non, car $f(1) = -1 \neq -2$.

Correction de l'exercice 2 – Résoudre graphiquement une équation

Résoudre $f(x) = k$ graphiquement, c'est chercher les **abscisses** des points d'intersection de la courbe avec la droite horizontale $y = k$.

a) La droite $y = 2$ coupe la courbe en **deux** points, d'abscisses -2 et 2. L'ensemble des solutions est donc

$$S = \{-2\,;2\}$$

b) La valeur -2 est atteinte au point le plus bas de la courbe, et **une seule fois** : la droite $y = -2$ touche la courbe en son sommet, d'abscisse 0.

$$S = \{0\}$$

c) **Aucune.** Le point le plus bas de la courbe est à l'ordonnée -2 : la courbe ne descend jamais en dessous. La droite $y = -5$ passerait donc entièrement **sous** la courbe, sans la rencontrer.

$$f(x) \geq -2 \quad \text{pour tout } x \quad \text{donc} \quad f(x) = -5 \quad \text{est impossible}$$

Ce que l'exercice installe. Le nombre de solutions dépend de k : deux si $k > -2$, une seule si $k = -2$, aucune si $k < -2$. C'est la hauteur de la droite par rapport au minimum de la fonction qui décide.

L'erreur de lecture à éviter. Répondre $S = \{2\}$ à la question a) en lisant l'ordonnée de la droite au lieu des abscisses des points d'intersection. Les solutions d'une équation sont toujours des valeurs de x.

Réponse. a) $S = \{-2\,;2\}$ — b) $S = \{0\}$ — c) aucune, car le minimum de f vaut $-2 > -5$.

Correction de l'exercice 3 – Résoudre graphiquement une inéquation

a) $f(x) \geq 2$ signifie que le point de la courbe est **au-dessus** (ou sur) la droite $y = 2$. C'est le cas sur les deux « branches » extérieures, donc pour $x \leq -2$ et pour $x \geq 2$. Comme la fonction n'est définie que sur $[-3\,;3]$:

$$S = [-3\,;-2] \cup [2\,;3]$$

b) C'est la situation complémentaire : la courbe est **en dessous** de la droite entre les deux points d'intersection.

$$S = [-2\,;2]$$

Les bornes sont incluses dans les deux réponses, car l'inégalité est large et la courbe **touche** la droite en -2 et 2.

c) Étudier le signe de $f(x)$, c'est comparer la courbe à l'**axe des abscisses**, c'est-à-dire à la droite $y = 0$. La courbe coupe cet axe en deux points, d'abscisses environ $-1{,}4$ et $1{,}4$. Donc :

— $f(x) > 0$ sur $[-3\,;-1{,}4[$ et sur $]1{,}4\,;3]$;
— $f(x) < 0$ sur $]-1{,}4\,;1{,}4[$;
— $f(x) = 0$ en $x \approx -1{,}4$ et $x \approx 1{,}4$.

Le contrôle par le calcul. La fonction est $f(x) = x^2 - 2$, qui s'annule pour $x^2 = 2$, soit $x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41$: la lecture graphique est cohérente ✓

Le mot qui décide du crochet. « Supérieur ou égal » : bornes **incluses**, crochets fermés. « Strictement supérieur » : bornes exclues, crochets ouverts.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) $[-3\,;-2]\cup[2\,;3]$ — b) $[-2\,;2]$ — c) positif en dehors de $\left]-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right[$, négatif à l'intérieur.

Correction de l'exercice 4 – Comparer deux fonctions graphiquement

a) Les solutions de $f(x)=g(x)$ sont les **abscisses des points d'intersection** des deux courbes. Sur le graphique, elles se croisent en deux points, d'abscisses

$$x=-1 \qquad \text{et} \qquad x=2$$

b) $f(x)\geq g(x)$ signifie que C_f est **au-dessus** de C_g. C'est le cas **entre** les deux points d'intersection :

$$S=[-1\,;2]$$

c) On lit les quatre images :

— en $x=0$: $f(0)=1$ et $g(0)=-1$, donc $f(0)>g(0)$ — cohérent avec a), puisque $0\in[-1\,;2]$;
— en $x=3$: $f(3)=4$ et $g(3)=5$, donc $f(3)<g(3)$ — cohérent aussi, puisque $3\notin[-1\,;2]$.

Le contrôle par le calcul. Les fonctions représentées sont $f(x)=x+1$ et $g(x)=x^2-x-1$. On vérifie :

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x+1=x^2-x-1\Leftrightarrow 0=x^2-2x-2$$

et $x^2-2x-2=(x-1)^2-3$, donc $x=1\pm\sqrt{3}$, soit environ $-0{,}73$ et $2{,}73$.

Les lectures graphiques annoncées, -1 et 2, sont donc **approximatives** : les vraies valeurs sont $-0{,}73$ et $2{,}73$. C'est exactement la limite d'une lecture graphique — elle donne l'allure et l'ordre de grandeur, pas la valeur exacte.

La leçon de méthode. On annonce toujours une lecture graphique comme approchée, et l'on passe au calcul dès que la formule est connue.

Réponse. a) environ $x=-1$ et $x=2$ (valeurs exactes $1\pm\sqrt{3}$) — b) $S\approx[-1\,;2]$ — c) $f(0)>g(0)$ et $f(3)<g(3)$.

Correction de l'exercice 5 – Tracer une courbe à partir d'un tableau

a) On remplace x par chaque valeur dans $f(x)=-x^2+2x+3$, en faisant attention au signe du carré :

$$f(-2)=-4-4+3=-5 \qquad f(-1)=-1-2+3=0 \qquad f(0)=3$$

$$f(1)=-1+2+3=4 \qquad f(2)=-4+4+3=3 \qquad f(3)=-9+6+3=0 \qquad f(4)=-16+8+3=-5$$

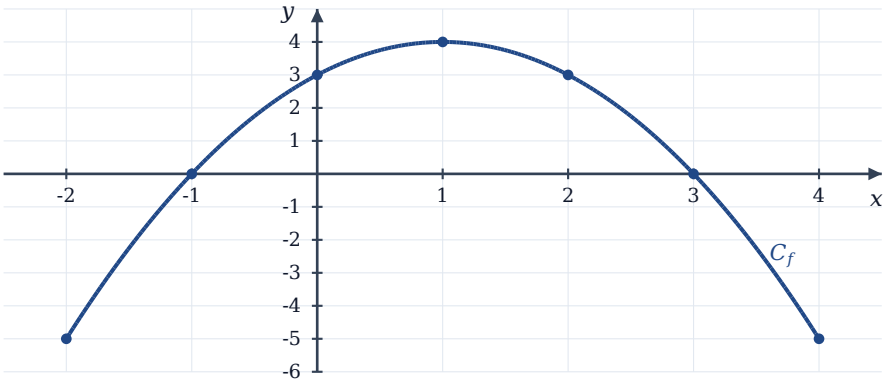
x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-5	0	3	4	3	0	-5

b) On place les sept points, puis on les joint par une courbe régulière en forme de cloche, le sommet étant le point $(1\,;4)$. Le tracé figure ci-dessous.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Le contrôle de symétrie. Les valeurs se lisent en miroir autour de $x = 1$: $f(0) = f(2) = 3$, $f(-1) = f(3) = 0$, $f(-2) = f(4) = -5$. Si une paire ne correspond pas, un calcul est faux.

Réponse. a) -5 ; 0 ; 3 ; 4 ; 3 ; 0 ; -5 — b) courbe en cloche, de sommet $(1\,;4)$.



Les sept points du tableau et la courbe de f.

Correction de l’exercice 6 – Est-ce la courbe d’une fonction ?

Le critère est le **test de la verticale** : un tracé représente une fonction si et seulement si toute droite verticale le coupe **au plus une fois**. Sinon, un même x aurait deux images, ce qu’une fonction interdit.

a) **Oui.** Une droite non verticale d’équation $y = mx + p$ est coupée par chaque verticale en exactement un point. C’est la courbe de la fonction affine $x \mapsto mx + p$.

b) **Non.** La droite $x = 3$ est elle-même verticale : la verticale $x = 3$ la rencontre en une infinité de points. Le nombre 3 aurait alors une infinité d’images, ce qui est impossible.

c) **Non.** La verticale $x = 0$ coupe le cercle en **deux** points, $(0\,;2)$ et $(0\,;-2)$. Le nombre 0 aurait donc deux images. On peut toutefois représenter la **moitié** du cercle : $x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$ est bien une fonction, définie sur $[-2\,;2]$.

d) **Oui.** Une parabole d’axe vertical est coupée une seule fois par chaque verticale. C’est la courbe d’une fonction du type $x \mapsto a(x-1)^2 + 2$.

La formulation à retenir. Une fonction associe à chaque x **au plus une** image. Graphiquement, cela se voit d’un coup d’œil : aucun tracé ne doit « se superposer » verticalement.

Le cas limite. Une verticale peut ne couper le tracé **aucune** fois : cela signifie simplement que ce x n’appartient pas à l’ensemble de définition. C’est permis — ce qui est interdit, c’est **deux** intersections.

Réponse. a) oui — b) non, une verticale la coupe une infinité de fois — c) non, deux points par verticale — d) oui.

Correction de l’exercice 7 – Intersections avec les axes

a) Un point de l’axe des ordonnées a une **abscisse nulle** : son ordonnée est donc $f(0)$.

$$f(0) = 0 - 0 + 3 = 3$$

Le point d’intersection est $(0\,;3)$.

b) Un point de l’axe des abscisses a une **ordonnée nulle** : on cherche donc les antécédents de 0, en résolvant $f(x) = 0$. Avec la forme factorisée fournie :

$$(x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

(un produit est nul si l'un de ses facteurs l'est). Les points d'intersection sont donc

$$(1\,;0) \qquad \text{et} \qquad (3\,;0)$$

c) Parce qu'un nombre a **au plus une** image. L'axe des ordonnées est la droite verticale $x = 0$: d'après le test de la verticale, elle coupe la courbe au plus une fois. Si 0 appartient à l'ensemble de définition il y a exactement un point, $(0\,;f(0))$; sinon il n'y en a aucun.

En revanche, la courbe peut couper l'axe des **abscisses** autant de fois qu'il y a d'antécédents de 0 — ici deux.

Le contrôle du développement. $(x-1)(x-3) = x^2 - 3x - x + 3 = x^2 - 4x + 3$ ✓ La forme factorisée fournie correspond bien à la fonction.

Le vocabulaire. Les abscisses des points d'intersection avec l'axe des abscisses s'appellent les **racines** de la fonction, ou ses **zéros**.

Réponse. a) $(0\,;3)$ — b) $(1\,;0)$ et $(3\,;0)$ — c) l'axe des ordonnées est la verticale $x = 0$, qui coupe la courbe au plus une fois.

Correction de l'exercice 8 – Lire un extremum

a) Le point le plus **haut** de la courbe se situe à l'abscisse 2, à la hauteur 5. Donc le maximum de f sur $[0\,;6]$ est

$$5, \text{ atteint en } x = 2$$

b) Le point le plus **bas** se situe à l'extrémité droite de la courbe, en $x = 6$, à la hauteur -3. Le minimum de f sur $[0\,;6]$ est donc

$$-3, \text{ atteint en } x = 6$$

Il est atteint à une **borne** de l'intervalle, et non en un point où la courbe « tourne ». On peut le contrôler avec l'expression de la fonction représentée, $f(x) = -0{,}5(x-2)^2 + 5$:

$$f(6) = -0{,}5 \times 16 + 5 = -8 + 5 = -3 \ \checkmark$$

c) Le maximum étant 5 et le minimum -3, toutes les valeurs de la fonction sont comprises entre les deux :

$$-3 \leq f(x) \leq 5 \quad \text{pour tout } x \in [0\,;6]$$

Ce que l'exercice apprend. Un extremum peut se trouver **au bord** de l'intervalle : il faut toujours regarder les deux extrémités, et pas seulement les « sommets » de la courbe. C'est l'erreur classique dès qu'on travaille sur un intervalle fermé.

Le vocabulaire exact. Le maximum est la **valeur** 5 ; 2 est la valeur **en laquelle** il est atteint. Confondre les deux est fréquent : on dit « le maximum vaut 5 », jamais « le maximum est 2 ».

Réponse. a) maximum 5, atteint en $x = 2$ — b) minimum -3, atteint en $x = 6$ — c) $-3 \leq f(x) \leq 5$.

Correction de l'exercice 9 – Lire le signe d'une fonction

a) Les antécédents de 0 sont les **abscisses des points où la courbe coupe l'axe des abscisses**. On lit

$$x = -1 \qquad \text{et} \qquad x = 3$$

b) On compare la courbe à l'axe des abscisses, c'est-à-dire à la droite $y = 0$:

— la courbe est **au-dessus** de l'axe avant -1 et après 3, donc $f(x) > 0$ sur $[-2\,;-1[$ et sur $]3\,;5]$;
— elle est **en dessous** entre les deux, donc $f(x) < 0$ sur $]-1\,;3[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Le tableau de signes résume ces lectures :

x	-2		-1		3		5
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le contrôle par le calcul. La fonction représentée est $f(x) = 0{,}5(x+1)(x-3)$. Le produit s'annule bien en -1 et 3, et le coefficient 0,5 étant positif, il est négatif **entre** les racines ✓ La lecture graphique et le calcul concordent.

Le lien à retenir. « Étudier le signe de $f(x)$ » et « comparer la courbe à l'axe des abscisses » sont exactement la même chose. C'est le cas particulier $k = 0$ de la résolution graphique de $f(x) \geq k$.

Réponse. a) -1 et 3 — b) $f > 0$ sur $[-2\,;-1[$ et $]3\,;5]$, $f < 0$ sur $]-1\,;3[$ — c) +, 0, −, 0, +.

Correction de l'exercice 10 – Combien de solutions selon k ?

Résoudre $f(x) = k$, c'est compter les points d'intersection de la courbe avec la droite horizontale $y = k$. On fait donc « monter » cette droite depuis le bas et on observe.

— **Si** $k < -4$: la droite passe entièrement sous la courbe. **Aucune** solution.
— **Si** $k = -4$: la droite touche la courbe en son point le plus bas, d'abscisse 0. **Une** solution.
— **Si** $-4 < k \leq 5$: la droite coupe les deux branches de la courbe. **Deux** solutions.
— **Si** $k > 5$: la droite passe au-dessus des deux extrémités de la courbe, qui s'arrête en $x = -3$ et $x = 3$. **Aucune** solution.

On peut résumer :

valeur de k	$k < -4$	$k = -4$	$-4 < k \leq 5$	$k > 5$
nombre de solutions	0	1	2	0

Le rôle des bornes. Sans l'intervalle $[-3\,;3]$, il y aurait deux solutions pour **tout** $k > -4$. C'est la restriction du domaine qui crée le dernier cas : au-delà de 5, la courbe n'existe plus.

Le contrôle par le calcul. La fonction est $f(x) = x^2 - 4$. L'équation $x^2 - 4 = k$ donne $x^2 = k + 4$: aucune solution si $k + 4 < 0$, une si $k + 4 = 0$, deux si $k + 4 > 0$ — à condition que $|x| \leq 3$, soit $k \leq 5$ ✓

Réponse. Aucune solution si $k < -4$ ou $k > 5$; une seule si $k = -4$; deux si $-4 < k \leq 5$.

Correction de l'exercice 11 – Lecture graphique en contexte

a) Le début de la vidange correspond à $t = 0$. On lit l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 0 :

$$h(0) = 60 \text{ cm}$$

b) Le bac est vide quand la hauteur est nulle : on cherche l'antécédent de 0, c'est-à-dire l'abscisse du point où la courbe rencontre l'axe des abscisses. On lit

$$t = 12 \text{ minutes}$$

c) On cherche l'antécédent de 30 : on part de 30 sur l'axe vertical, on rejoint la courbe, puis on descend sur l'axe horizontal. On lit $t = 6$ minutes.

d) On résout graphiquement $h(t) > 20$: ce sont les abscisses des points de la courbe situés **au-dessus** de la droite $y = 20$. La courbe passe au-dessus depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 8$, donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$S = [0\,;8[$$

La hauteur dépasse 20 cm pendant les 8 **premières minutes**.

Le contrôle par le calcul. La droite passe par $(0\,;60)$ et $(12\,;0)$: son coefficient directeur est $\frac{0-60}{12} = -5$, donc $h(t) = -5t + 60$. On vérifie $h(6) = -30 + 60 = 30$ ✓ et $h(8) = -40 + 60 = 20$ ✓

L'interprétation du coefficient. La hauteur baisse de 5 cm par minute, régulièrement : c'est ce que traduit la forme rectiligne de la courbe.

Réponse. a) 60 cm — b) au bout de 12 min — c) à $t = 6$ min — d) pendant les 8 premières minutes.

Correction de l'exercice 12 – Précision d'une lecture graphique

a) On calcule l'image de 1,7 :

$$f(1{,}7) = 1{,}7^2 - 3 = 2{,}89 - 3 = -0{,}11$$

Le résultat n'est pas nul : 1,7 **n'est pas** une solution exacte, seulement une valeur approchée. L'écart de $-0{,}11$ montre qu'on est légèrement en dessous de l'axe.

b) On résout exactement :

$$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{3}$$

Or $\sqrt{3} = 1{,}732\,05\ldots$, donc les valeurs approchées au centième sont $-1{,}73$ et $1{,}73$.

c) La lecture est **acceptable** : sur un graphique gradué à l'unité, lire 1,7 au lieu de 1,73 est une précision normale, l'erreur étant inférieure à un demi-carreau.

Ce qui n'est pas acceptable, c'est de l'écrire comme une égalité. La rédaction correcte utilise le symbole d'approximation et le mot « graphiquement » :

$$\text{graphiquement, } x \approx -1{,}7 \quad \text{et} \quad x \approx 1{,}7$$

et, si la formule est connue, on **complète par le calcul** pour donner les valeurs exactes $\pm\sqrt{3}$.

La règle à retenir. Une lecture graphique ne prouve rien : elle **suggère**. Quand l'énoncé fournit l'expression de la fonction, la réponse attendue est toujours la valeur exacte obtenue par le calcul, la lecture ne servant qu'à contrôler.

L'ordre de grandeur de l'erreur. Sur un repère gradué à l'unité, on lit au mieux le dixième : annoncer $x = 1{,}732$ « par lecture graphique » serait aussi fautif que d'écrire une égalité.

Réponse. a) non, $f(1{,}7) = -0{,}11 \neq 0$ — b) valeurs exactes $\pm\sqrt{3}$, soit $\approx \pm 1{,}73$ — c) acceptable comme lecture, à écrire avec $\approx$ puis à confirmer par le calcul.

Correction de l'exercice 13 – Reconstituer une courbe par symétrie

a) On remplace x par $-x$ dans l'expression et on utilise $(-x)^2 = x^2$:

$$f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$$

L'égalité est vraie pour tout x de l'intervalle, qui est lui-même symétrique par rapport à 0.

b) Deux nombres opposés ont la même image : les points $(x\,;f(x))$ et $(-x\,;f(x))$ sont à la **même hauteur**, de part et d'autre de l'axe des ordonnées. La courbe est donc **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

c) La symétrie donne directement les images des nombres négatifs, sans aucun calcul :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$f(-1) = f(1) = 0 \qquad f(-2) = f(2) = 3 \qquad f(-3) = f(3) = 8$$

L'économie réalisée. Pour tracer la courbe sur $[-3\,;3]$, il suffit de calculer les images sur $[0\,;3]$ puis de **replier** le tracé de l'autre côté de l'axe des ordonnées. C'est deux fois moins de calculs, et deux fois moins d'occasions de se tromper.

Ce n'est pas automatique. Pour $g(x) = x^2 + x$, on a $g(-1) = 0$ alors que $g(1) = 2$: deux nombres opposés n'ont pas toujours la même image, et la courbe de g n'a pas cette symétrie. Il faut donc toujours **vérifier** l'égalité $f(-x) = f(x)$ avant de replier une courbe.

Réponse. a) $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$ — b) la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées — c) $f(-1) = 0$, $f(-2) = 3$, $f(-3) = 8$.

Correction de l'exercice 14 – D'une courbe à un tableau de valeurs

a) Pour chaque abscisse entière, on monte jusqu'à la courbe et on lit l'ordonnée :

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	6	1	-2	-3	-2	1	6

b) L'équation $f(x) = 1$ correspond à la droite horizontale $y = 1$. Elle coupe la courbe en **deux** points, d'abscisses 0 et 4 — deux valeurs qui figurent d'ailleurs dans le tableau, où 1 apparaît deux fois.

$$S = \{0\,;4\}$$

c) Le point le plus bas de la courbe se situe à l'abscisse 2, à la hauteur -3. Le minimum vaut donc -3, et l'on peut écrire

$$-3 \leq f(x) \leq 6 \quad \text{pour tout } x \in [-1\,;5]$$

Le contrôle par la symétrie du tableau. Les valeurs se lisent en miroir autour de $x = 2$: $f(1) = f(3) = -2$, $f(0) = f(4) = 1$, $f(-1) = f(5) = 6$. Cette régularité confirme les lectures — si une paire ne correspondait pas, une lecture serait fausse.

Le contrôle par le calcul. La fonction est $f(x) = x^2 - 4x + 1$. On vérifie $f(0) = 1$ ✓, $f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$ ✓ et $f(5) = 25 - 20 + 1 = 6$ ✓

La différence avec une lecture sur formule. Ici les valeurs entières tombent juste : le tableau est exact. Pour une abscisse comme $x = 1{,}5$, la lecture ne donnerait qu'une approximation.

Réponse. a) 6 ; 1 ; -2 ; -3 ; -2 ; 1 ; 6 — b) deux solutions, 0 et 4 — c) $-3 \leq f(x) \leq 6$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : tout lire sur une courbe

a) On monte verticalement depuis chaque abscisse jusqu'à la courbe :

$$f(-1) = -1 \qquad f(0) = 2 \qquad f(3) = -1$$

b) Pour $f(x) = 2$, on relève les abscisses des points d'intersection avec la droite $y = 2$: la courbe la rencontre en $x = 0$ et en $x = 2$.

$$S = \{0\,;2\}$$

Pour $f(x) = 0$, on relève les abscisses des points où la courbe coupe l'axe des abscisses : on lit environ $x \approx -0{,}7$ et $x \approx 2{,}7$.

c) $f(x) \leq 2$ correspond aux points de la courbe situés **en dessous** (ou sur) la droite $y = 2$. La courbe est au-dessus **entre** 0 et 2, donc en dessous de part et d'autre :

$$S = [-1\,;0] \cup [2\,;3]$$

d) Le point le plus haut est le sommet de la courbe, à l'abscisse 1, à la hauteur 3 : le

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

maximum vaut 3, atteint en $x = 1$.

Le point le plus bas est à la hauteur -1, et il est atteint **deux fois**, aux deux extrémités $x = -1$ et $x = 3$. Le **minimum** vaut donc -1, atteint en $x = -1$ et en $x = 3$ — aux bornes de l'intervalle, et non au « creux » de la courbe, qui n'en a pas ici.

e) La courbe coupe l'axe des abscisses en $\approx -0{,}7$ et $\approx 2{,}7$, et elle est au-dessus **entre** ces deux valeurs :

x	-1		$-0{,}7$		$2{,}7$		3
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le contrôle par le calcul. La fonction est $f(x) = -x^2 + 2x + 2$. On vérifie $f(-1) = -1 - 2 + 2 = -1$ ✓, $f(0) = 2$ ✓, $f(1) = -1 + 2 + 2 = 3$ ✓ et $f(3) = -9 + 6 + 2 = -1$ ✓ Les racines exactes sont $1 \pm \sqrt{3}$, soit $-0{,}73$ et $2{,}73$: les lectures de e) sont cohérentes.

Ce que montre la question d). Un minimum peut être atteint en **plusieurs** points : c'est la **valeur** qui est unique, pas l'endroit. Ici la symétrie de la courbe autour de $x = 1$ place les deux bornes à la même hauteur.

Le bilan de la plaquette. Image : on part de l'axe des abscisses, on lit **une** ordonnée. Équation, inéquation, signe : on part d'une **droite horizontale** ($y = k$, ou l'axe pour $k = 0$) et on lit **des abscisses**. Comparaison de deux fonctions : on regarde quelle courbe est la plus haute. Et toute lecture s'annonce approchée.

Réponse. a) -1 ; 2 ; -1 — b) $S = \{0\,;2\}$ puis $x \approx -0{,}7$ et $x \approx 2{,}7$ — c) $[-1\,;0] \cup [2\,;3]$ — d) maximum 3 en $x = 1$, minimum -1 atteint en $x = -1$ et $x = 3$ — e) $-$, 0, $+$, 0, $-$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).