

Plaquette 4 – Changer de représentation

Fonctions : généralités — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois représentations d'une fonction et les passages entre elles.

- **Formule → tableau.** On calcule $f(x)$ pour chaque valeur choisie. C'est toujours possible, et **exact**.
- **Tableau → courbe.** On place les points $(x; f(x))$ puis on les joint. $\triangle$ Le tracé **entre** les points est une hypothèse : rien ne garantit que la fonction s'y comporte régulièrement.
- **Courbe → tableau.** On lit les ordonnées des points d'abscisses choisies. Les valeurs obtenues sont **approchées**.
- **Courbe → formule.** On ne peut que **reconnaître** une formule parmi plusieurs, en testant quelques points caractéristiques :

$f(0)$ (ordonnée à l'origine), les antécédents de 0, le sens de variation

- **Tableau → formule.** Possible seulement si l'on connaît le **type** de fonction. Pour une fonction affine $f(x) = mx + p$, deux points suffisent :

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{puis } p \text{ en remplaçant dans un des deux points}$$

- **Table de la calculatrice.** On saisit l'expression, on règle le **début** et le **pas**, et l'on obtient un tableau de valeurs. C'est l'outil du **balayage** : en réduisant le pas, on approche une solution d'autant plus près que l'on veut.
- **Tableur.** La colonne A contient les valeurs de x , la colonne B la formule. Pour $f(x) = 3x^2 - 5$, on saisit en B2 la formule

$$= 3 * A2^2 - 5$$

puis on l'**étire** vers le bas : la référence A2 se décale automatiquement en A3, A4, etc.

- **Le critère de choix.** Valeur exacte, démonstration : la **formule**. Allure, nombre de solutions, position relative : la **courbe**. Quelques cas à comparer : le **tableau**.

Correction de l'exercice 1 - De la formule au tableau

a) On remplace x par chaque valeur dans $f(x) = 2x^2 - 3x$, en soignant les signes :

$$f(-2) = 2 \times 4 + 6 = 14 \quad f(-1) = 2 + 3 = 5 \quad f(0) = 0$$

$$f(1) = 2 - 3 = -1 \quad f(2) = 8 - 6 = 2 \quad f(3) = 18 - 9 = 9$$

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	14	5	0	-1	2	9

b) Non, et c'est même **faux**. Le tableau montre que $f(0) = 0$ puis $f(1) = -1$: la fonction **baisse** entre 0 et 1, avant de remonter. Elle n'est donc pas croissante sur $[0; 3]$.

Plus généralement, un tableau ne peut jamais **prouver** une monotonie : il ne donne que quelques valeurs, et la fonction peut faire n'importe quoi entre elles. Il peut en revanche la **réfuter**, comme ici — il suffit d'un couple de valeurs qui contredit le sens annoncé.

La dissymétrie à retenir. Un tableau de valeurs **réfute** mais ne **démontre** pas. Pour prouver une monotonie en Seconde, il faut revenir à la définition avec des inégalités, ou utiliser une forme adaptée de l'expression.

Le contrôle du calcul en $x = -2$. $-3 \times (-2) = +6$: le second terme devient positif. Une erreur de signe donnerait 2 au lieu de 14.

Réponse. a) 14 ; 5 ; 0 ; -1 ; 2 ; 9 — b) non, c'est même faux : $f(0) = 0 > -1 = f(1)$.

Correction de l'exercice 2 - De la formule à la courbe

a) On calcule les sept images avec $g(x) = -x^2 + 4x$:

$$g(-1) = -1 - 4 = -5 \quad g(0) = 0 \quad g(1) = -1 + 4 = 3 \quad g(2) = -4 + 8 = 4$$

$$g(3) = -9 + 12 = 3 \quad g(4) = -16 + 16 = 0 \quad g(5) = -25 + 20 = -5$$

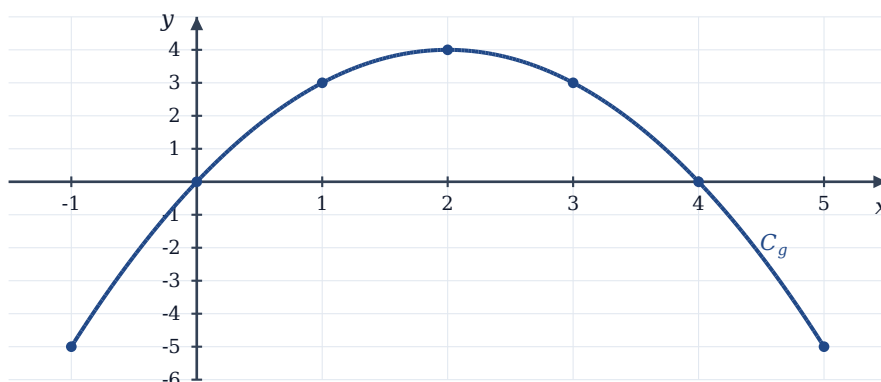
x	-1	0	1	2	3	4	5
g(x)	-5	0	3	4	3	0	-5

b) On place les sept points et on les joint par une courbe régulière en forme de cloche, dont le point le plus haut est (2 ; 4). Le tracé figure ci-dessous.

Le contrôle de symétrie. Les valeurs se répètent en miroir autour de $x = 2$:

$g(1) = g(3) = 3$, $g(0) = g(4) = 0$, $g(-1) = g(5) = -5$. Si une paire ne correspond pas, un calcul est faux.

Réponse. a) -5 ; 0 ; 3 ; 4 ; 3 ; 0 ; -5 — b) courbe en cloche, point le plus haut (2 ; 4).



Les sept points du tableau et la courbe de g .

Correction de l'exercice 3 - De la courbe au tableau

a) Pour chaque abscisse entière, on monte verticalement jusqu'à la courbe et on lit l'ordonnée :

x	-1	0	1	2	3	4
f(x)	4	0	-2	-2	0	4

b) Les valeurs sont **approchées**, même quand elles « tombent juste ». Une lecture graphique dépend de l'épaisseur du trait, de la précision du tracé et de l'œil du lecteur : on ne peut pas garantir mieux qu'un demi-carreau, soit 0,5 ici.

Ce qui rassure, en revanche, c'est la **cohérence** : les valeurs se répètent en miroir autour de $x = 1,5$ ($f(1) = f(2) = -2$, $f(0) = f(3) = 0$, $f(-1) = f(4) = 4$). Cette symétrie suggère fortement que les lectures sont bonnes.

Le contrôle par le calcul. La fonction représentée est $f(x) = x^2 - 3x$. On vérifie $f(-1) = 1 + 3 = 4 \checkmark$, $f(1) = 1 - 3 = -2 \checkmark$ et $f(4) = 16 - 12 = 4 \checkmark$: les lectures étaient exactes, mais **on ne pouvait pas le savoir** sans la formule.

La leçon. Dès qu'une formule est disponible, on l'utilise : elle donne l'exactitude que la courbe ne donne jamais.

Réponse. a) 4 ; 0 ; -2 ; -2 ; 0 ; 4 — b) approchées : une lecture graphique ne garantit pas mieux qu'un demi-carreau.

Correction de l'exercice 4 - Reconnaître une formule sur une courbe

On teste les trois points caractéristiques sur chaque expression. Il suffit qu'**un seul** échoue pour éliminer la candidate.

Test de f_1 : $f_1(0) = 3 \checkmark$, $f_1(1) = 1 - 4 + 3 = 0 \checkmark$, $f_1(2) = 4 - 8 + 3 = -1 \checkmark$

Les trois points conviennent. De plus, $f_1(3) = 9 - 12 + 3 = 0$ et $f_1(4) = 16 - 16 + 3 = 3$: la fonction remonte bien après $x = 2 \checkmark$

Test de f_2 : $f_2(0) = 3 \checkmark$ mais

$$f_2(1) = 1 - 2 + 3 = 2 \neq 0$$

Éliminée dès le second point.

Test de f_3 : $f_3(0) = 3 \checkmark$ mais $f_3(1) = -1 + 4 + 3 = 6 \neq 0$. Éliminée également. On pouvait aussi l'écarter d'emblée : son coefficient de x^2 est **négatif**, donc sa courbe est tournée vers le bas et ne « remonte » pas à droite.

C'est donc f_1 qui convient.

La méthode générale. Pour identifier une fonction à partir d'une courbe, on teste dans l'ordre : l'**ordonnée à l'origine** $f(0)$, puis un ou deux autres points lus, puis le **sens de variation** (signe du coefficient dominant). Trois critères suffisent presque toujours à départager.

Ce qu'on ne peut pas faire. On ne **détermine** pas une formule à partir d'une courbe : on la **reconnait** parmi des candidates proposées. Une infinité de fonctions passent par trois points donnés.

Réponse. C'est $f_1(x) = x^2 - 4x + 3$: elle vérifie les trois points et remonte après $x = 2$.

Correction de l'exercice 5 - Du tableau à la formule d'une fonction affine

a) Quand x augmente de 3 (de -1 à 2, de 2 à 5, de 5 à 8), l'image varie de

$$1 - 7 = -6 \quad -5 - 1 = -6 \quad -11 - (-5) = -6$$

Les accroissements sont bien **réguliers** : -6 pour +3 en abscisse. C'est ce qui rend l'hypothèse affine crédible.

b) Le coefficient est le quotient de l'accroissement des images par celui des abscisses :

$$m = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{-6}{3} = -2$$

Pour p , on remplace dans un point connu, par exemple (2 ; 1) :

$$f(2) = -2 \times 2 + p = 1 \Leftrightarrow -4 + p = 1 \Leftrightarrow p = 5$$

Donc $f(x) = -2x + 5$. Contrôle sur un autre point : $f(8) = -16 + 5 = -11 \checkmark$

c) $f(10) = -20 + 5 = -15$.

Pour l'antécédent de 0, on résout :

$$-2x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = 2,5$$

Pourquoi l'hypothèse « affine » est indispensable. Sans elle, le tableau ne permettrait rien : une infinité de fonctions passent par ces quatre points. C'est l'énoncé qui fournit le **type** de fonction, et le tableau qui fournit les **coefficients**.

Le contrôle systématique. Une fois m et p trouvés, on vérifie la formule sur un point **non utilisé** pour les calculer — ici $(8; -11)$, qui n'a servi à rien dans la question b).

Réponse. a) accroissement constant -6 pour $+3$ — b) $m = -2$ et $p = 5$, donc $f(x) = -2x + 5$ — c) $f(10) = -15$ et l'antécédent de 0 est $2,5$.

Correction de l'exercice 6 - Écrire une formule de tableur

a) On traduit l'expression en syntaxe de tableur, en remplaçant x par la référence de cellule A2 :

$$= 3 * A2^2 - 5 * A2 + 2$$

La formule commence par le signe $=$, la multiplication s'écrit avec l'astérisque et la puissance avec l'accent circonflexe.

b) En étirant vers le bas, le tableur **décale automatiquement** la référence : en B3 la formule devient $= 3 * A3^2 - 5 * A3 + 2$, en B4 elle utilise A4, et ainsi de suite jusqu'en B12 qui utilise A12.

C'est le principe de la **référence relative** : la position de la cellule utilisée suit celle de la formule. On obtient ainsi les onze images en une seule manipulation.

c) Le problème est que la formule recopiée « à la main » garde la référence A2 : la cellule B3 calculerait donc encore l'image de la valeur contenue en A2, et non celle de A3. Toute la colonne afficherait la **même** valeur.

Il faut soit **étirer** la formule (ce qui décale les références), soit saisir à la main $= 3 * A3^2 - 5 * A3 + 2$ en B3.

Le contrôle en une seconde. Après l'étirement, on vérifie une valeur connue : pour $x = 0$, la formule doit donner 2 ; pour $x = 1$, elle doit donner $3 - 5 + 2 = 0$. Si toute la colonne affiche 2 , c'est que les références n'ont pas suivi.

L'intérêt du tableur. Il produit un tableau de valeurs long sans aucun calcul à la main, ce qui rend le **balayage** immédiat : on repère d'un coup d'œil entre quelles valeurs la fonction change de signe.

Réponse. a) $= 3 * A2^2 - 5 * A2 + 2$ — b) les références se décalent en A3, A4, ... — c) la formule recopiée garde A2 : toute la colonne afficherait la même valeur.

Correction de l'exercice 7 - Balayer avec la table de la calculatrice

a) On cherche où la fonction **change de signe** : elle passe de -1 en $x = 2$ à $+4$ en $x = 3$. La solution est donc comprise entre 2 et 3 :

$$2 < x < 3$$

b) Avec le pas de $0,1$, le changement de signe se produit entre $2,2$ et $2,3$:

$$f(2,2) = -0,16 < 0 \quad \text{et} \quad f(2,3) = 0,29 > 0$$

D'où l'encadrement plus fin

$$2,2 < x < 2,3$$

On peut continuer : avec un pas de $0,01$, on obtiendrait $2,23 < x < 2,24$, et ainsi de suite.

c) L'équation se résout exactement :

$$x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{5}$$

La solution positive est $\sqrt{5} = 2,236\,06\dots$, ce qui confirme l'encadrement de b) ✓

Le principe du balayage. On repère l'intervalle où la fonction change de signe, puis on **réduit le pas** pour resserrer. Chaque division du pas par 10 gagne un chiffre décimal.

Ce que le balayage ne donne jamais. La valeur **exacte**. Ici $\sqrt{5}$ a une infinité de décimales : aucun tableau ne l'atteindra. Dès que la résolution exacte est possible, elle prime — le balayage sert quand elle ne l'est pas.

Réponse. a) $2 < x < 3$ — b) $2,2 < x < 2,3$ — c) la valeur exacte est $\sqrt{5} \approx 2,236$.

Correction de l'exercice 8 - Repérer une erreur dans un tableau

a) On calcule les six images avec $f(x) = x^2 - x$:

$$\begin{aligned} f(-2) &= 4 + 2 = 6 & f(-1) &= 1 + 1 = 2 & f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 - 1 = 0 & f(2) &= 4 - 2 = 2 & f(3) &= 9 - 3 = 6 \end{aligned}$$

b) La seule valeur qui diffère du tableau est la dernière : il annonce 9 alors que

$$f(3) = 9 - 3 = 6$$

La valeur correcte est donc 6. L'erreur vient probablement de l'oubli du second terme, $-x$.

c) La **régularité** du tableau. Les cinq premières valeurs se lisent en miroir autour de $x = 0,5$:

$$f(0) = f(1) = 0 \quad f(-1) = f(2) = 2 \quad f(-2) = f(3) \text{ devrait valoir } 6$$

La symétrie imposait donc $f(3) = f(-2) = 6$, et non 9. Un simple coup d'œil au miroir du tableau suffisait à repérer la case fautive, sans refaire les six calculs.

L'origine de cette symétrie. Pour $f(x) = x^2 - x$, on a

$f(1-x) = (1-x)^2 - (1-x) = 1 - 2x + x^2 - 1 + x = x^2 - x = f(x)$: deux abscisses symétriques par rapport à 0,5 ont la même image.

La méthode de vérification. Avant de rendre un tableau, on cherche une **régularité** : symétrie, accroissements constants, alternance de signes. Une case qui la brise est presque toujours fautive.

Réponse. a) 6 ; 2 ; 0 ; 0 ; 2 ; 6 — b) la valeur 9 est fautive, il faut $f(3) = 6$ — c) la symétrie du tableau autour de $x = 0,5$.

Correction de l'exercice 9 - Trois représentations, une seule fonction

a) On confronte les trois descriptions. La formule donne

$$f(0) = 6 \quad f(1) = -2 + 6 = 4 \quad f(3) = -6 + 6 = 0$$

Les trois valeurs correspondent exactement au tableau ✓

Quant à la courbe : le coefficient -2 est négatif, donc la droite **descend** ✓ et son ordonnée à l'origine est $f(0) = 6$ ✓ Les trois descriptions décrivent bien la même fonction.

b) Pour une **valeur exacte** en un point quelconque, c'est la **formule** qu'il faut :

$$f(7,5) = -2 \times 7,5 + 6 = -15 + 6 = -9$$

Le tableau ne contient pas 7,5, et la courbe ne donnerait qu'une valeur approchée.

c) Pour un **nombre de solutions**, la **courbe** répond immédiatement : la droite $y = 2$ est horizontale et la courbe de f est une droite non horizontale, donc elles se coupent en **exactement un point**. L'équation a une seule solution.

On peut la calculer avec la formule : $-2x + 6 = 2 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Le critère de choix, en une phrase. Valeur exacte → formule. Allure, nombre de solutions, position relative → courbe. Comparer quelques cas déjà calculés → tableau.

Ce que la cohérence apporte. Disposer de trois représentations permet de **se contrôler** : si la formule et le tableau se contredisaient, l'une des deux serait fausse, et il faudrait chercher laquelle avant d'aller plus loin.

Réponse. a) les trois donnent $f(0) = 6$, $f(1) = 4$, $f(3) = 0$ et une droite descendante — b) la formule : $f(7,5) = -9$ — c) la courbe : une seule solution, $x = 2$.

Correction de l'exercice 10 - Le danger du tracé entre deux points

a) On remplace x par chaque valeur dans $f(x) = x^2 - 4x + 4$:

$$f(0) = 4 \quad f(2) = 4 - 8 + 4 = 0 \quad f(4) = 16 - 16 + 4 = 4$$

b) Avec seulement $(0 ; 4)$ et $(4 ; 4)$, l'élève obtient un **segment horizontal** à la hauteur 4 : il conclurait que la fonction est constante.

C'est complètement faux. Le calcul de a) montre que $f(2) = 0$: la courbe **descend** jusqu'à toucher l'axe des abscisses en $x = 2$, avant de remonter. Son allure réelle est une cloche inversée, qui passe très loin du segment tracé — jusqu'à 4 unités d'écart au milieu.

c) Il n'existe pas de nombre « suffisant » garanti : quel que soit le nombre de points, la fonction peut faire autre chose entre eux. En pratique, on prend au moins **cinq à sept** points bien répartis, et surtout on complète par un raisonnement — ici, la forme

$$f(x) = (x - 2)^2$$

prouve que le minimum est 0, atteint en $x = 2$, ce qu'aucun tableau ne pouvait garantir.

La règle de prudence. Deux points ne donnent l'allure que si l'on sait **déjà** que la fonction est affine. Pour toute autre fonction, un tracé point par point est une **hypothèse** sur ce qui se passe entre les points.

La méthode fiable. Calculer plusieurs points, **et** étudier la fonction (variations, forme particulière de l'expression). C'est la combinaison des deux qui donne une courbe sûre.

Réponse. a) 4 ; 0 ; 4 — b) il obtient un segment horizontal et croit la fonction constante, alors que $f(2) = 0$ — c) aucun nombre ne suffit : il faut compléter par un raisonnement.

Correction de l'exercice 11 - D'un graphique de contexte à une formule

a) On lit l'ordonnée du point d'abscisse 0 : le montant est de 4 €.

$$M(0) = 4$$

C'est la **part fixe** du tarif : ce qu'on paie avant même d'avoir roulé (frais de dossier, assurance, mise à disposition).

b) Le graphique étant une droite, le prix horaire est constant : c'est le **coefficient directeur**. On lit deux points à coordonnées entières, par exemple $(0 ; 4)$ et $(4 ; 16)$:

$$\frac{16 - 4}{4 - 0} = \frac{12}{4} = 3$$

Chaque heure supplémentaire coûte donc 3 €.

c) Le montant est la part fixe plus le prix horaire multiplié par la durée :

$$M(x) = 3x + 4$$

Pour 7 heures :

$$M(7) = 21 + 4 = 25 \text{ €}$$

Contrôle sur le graphique : au-dessus de $x = 7$, la droite est bien à la hauteur 25 ✓

La traduction des deux coefficients. Dans un tarif, le coefficient directeur est le **prix unitaire** et l'ordonnée à l'origine la **part fixe**. C'est la lecture la plus fréquente des fonctions affines en contexte.

Le contrôle de vraisemblance. 8 heures coûtent 28 €, soit 3,50 € l'heure en moyenne : plus la location est longue, plus le prix moyen horaire baisse, puisque la part fixe se répartit. C'est cohérent avec l'existence d'une part fixe.

Réponse. a) 4 €, la part fixe — b) 3 € par heure — c) $M(x) = 3x + 4$ et $M(7) = 25$ €.

Correction de l'exercice 12 - Choisir la bonne représentation

a) La **formule**. Une valeur exacte, et de surcroît en un point irrationnel comme $\sqrt{2}$, ne peut venir que d'un calcul. Le tableau ne contient sûrement pas $\sqrt{2}$, et la courbe ne donnerait qu'une lecture approchée.

b) La **courbe**. On trace la droite horizontale $y = 3$ et l'on compte les points d'intersection : la réponse est immédiate et visuelle. Avec la formule il faudrait résoudre l'équation, ce qui est souvent plus long, et un tableau ne prouverait rien.

c) Le **tableau**. Trois valeurs précises à comparer : c'est exactement ce qu'un tableau fournit, sans calcul supplémentaire si elles y figurent déjà.

d) La **courbe**. Le sens de variation se voit d'un coup d'œil, alors qu'un tableau ne peut jamais le démontrer (il ne donne que quelques points) et que la formule demanderait un raisonnement plus élaboré.

Question	Représentation	Pourquoi
valeur exacte	formule	seule à être exacte
nombre de solutions	courbe	lecture immédiate
comparer quelques cas	tableau	valeurs déjà disponibles
variations	courbe	l'allure est visible

Le principe général. Chaque représentation a une **spécialité** : la formule l'exactitude, la courbe la vision d'ensemble, le tableau la comparaison ponctuelle. Choisir la mauvaise fait perdre du temps, ou conduit à une réponse non justifiée.

La nuance sur d). La courbe **suggère** les variations ; pour les **démontrer**, il faut revenir à la définition avec les inégalités. En Seconde, une lecture graphique est acceptée comme réponse à condition d'être annoncée comme telle.

Réponse. a) la formule — b) la courbe — c) le tableau — d) la courbe.

Correction de l'exercice 13 - Un tableau qui cache un piège

a) Le tableau ne donne que **quatre** valeurs ; entre elles, la fonction peut faire n'importe quoi. L'élève a observé une régularité sur les points **relevés**, ce qui rend l'hypothèse affine plausible — mais ne la démontre pas.

De plus, il n'a testé que des abscisses **paires** : rien ne dit ce qui se passe en $x = 1, 3$ ou 5 .

b) Une infinité de fonctions conviennent. Par exemple, la fonction qui vaut $x + 1$ aux abscisses paires mais fait un « crochet » entre elles : $f(1) = 100$ suffirait à ruiner l'hypothèse tout en conservant le tableau.

Plus élégamment, si l'on cherche une fonction donnée par une **formule** :

$$g(x) = x + 1 + (x - 0)(x - 2)(x - 4)(x - 6)$$

Le second terme s'annule en 0, 2, 4 et 6, donc g prend exactement les valeurs du tableau. Mais $g(1) = 2 + (1)(-1)(-3)(-5) = 2 - 15 = -13$, très loin de 2 : g n'est pas affine du tout.

c) Il suffirait que l'énoncé **affirme** que f est affine. Deux points déterminent alors entièrement la fonction, et le tableau permet de calculer m et p :

$$m = \frac{3-1}{2-0} = 1 \quad p = f(0) = 1 \quad \text{donc} \quad f(x) = x + 1$$

La leçon centrale de la plaquette. Un tableau **suggère**, il ne **démontre** jamais. C'est le **type** de fonction, donné par l'énoncé ou par le contexte, qui autorise à conclure — jamais la régularité des valeurs à elle seule.

La contrepartie rassurante. Dans un exercice, l'énoncé précise presque toujours le type de fonction. C'est cette phrase, souvent lue trop vite, qui rend le raisonnement valide.

Réponse. a) quatre valeurs ne prouvent rien sur ce qui se passe entre elles — b) par exemple $g(x) = x + 1 + x(x-2)(x-4)(x-6)$ — c) que l'énoncé précise que f est affine.

Correction de l'exercice 14 - Du tableur à la conjecture

a) On recalcule deux images avec $f(x) = x^3 - 3x$:

$$f(-2) = -8 + 6 = -2 \quad \checkmark \quad f(2) = 8 - 6 = 2 \quad \checkmark$$

Les deux valeurs du tableau sont correctes.

b) On suit les signes de gauche à droite : $-18, -2, +2, 0, -2, +2, +18$. La fonction change de signe **trois** fois :

- entre -2 et -1 (de -2 à $+2$) ;
- en $x = 0$, où elle vaut exactement 0 ;
- entre 1 et 2 (de -2 à $+2$).

Les trois antécédents de 0 sont donc encadrés par

$$-2 < x_1 < -1 \quad x_2 = 0 \quad 1 < x_3 < 2$$

(Les valeurs exactes sont $-\sqrt{3}$, 0 et $\sqrt{3}$, soit environ $-1,73$ et $1,73$: les encadrements sont cohérents.)

c) Non. Le tableau donne $f(-1) = 2$ et $f(1) = -2$: la fonction **baisse** entre -1 et 1 , alors que $-1 < 1$. Elle n'est donc pas croissante sur cet intervalle — elle y est au contraire décroissante.

C'est un cas où le tableau **réfute** : il suffit d'un couple de valeurs contredisant le sens annoncé pour conclure, et ce raisonnement-là est parfaitement valide.

L'usage du tableur. Il produit en quelques secondes un tableau assez long pour repérer **tous** les changements de signe, donc le nombre d'antécédents de 0 . En réduisant le pas, on resserre chaque encadrement.

La limite, toujours la même. Trois changements de signe **observés** ne prouvent pas qu'il n'y en a pas un quatrième entre deux valeurs du tableau. Ici c'est la nature de la fonction (degré 3) qui garantit au plus trois antécédents.

Réponse. a) $f(-2) = -2$ et $f(2) = 2 \quad \checkmark$ — b) trois changements de signe : $-2 < x_1 < -1$, $x_2 = 0$, $1 < x_3 < 2$ — c) non : $f(-1) = 2 > -2 = f(1)$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : passer d'une représentation à l'autre

a) On calcule les sept images avec $f(x) = x^2 - 4x + 3$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 1 + 4 + 3 = 8 & f(0) &= 3 & f(1) &= 1 - 4 + 3 = 0 & f(2) &= 4 - 8 + 3 = -1 \\ f(3) &= 9 - 12 + 3 = 0 & f(4) &= 16 - 16 + 3 = 3 & f(5) &= 25 - 20 + 3 = 8 \end{aligned}$$

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	8	3	0	-1	0	3	8

b) On place les sept points et on les joint par une courbe en forme de cloche vers le haut, dont le point le plus bas est $(2; -1)$. Les valeurs se lisent en miroir autour de $x = 2$, ce qui facilite le tracé.

c) Graphiquement, la courbe coupe l'axe des abscisses en $x = 1$ et $x = 3$: ce sont les antécédents de 0. On le lit d'ailleurs directement dans le tableau, où la valeur 0 apparaît deux fois.

Par le calcul, avec la forme factorisée :

$$(x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$$

Un produit est nul si l'un de ses facteurs l'est. Le calcul **confirme** la lecture et prouve qu'il n'y a pas d'autre antécédent.

d) Graphiquement, le point le plus bas de la courbe est à l'ordonnée -1 , à l'abscisse 2 : le minimum semble valoir -1 , atteint en $x = 2$.

La forme canonique le **démontre** :

$$f(x) = (x - 2)^2 - 1$$

Comme $(x - 2)^2 \geq 0$ pour tout x , on a $f(x) \geq -1$, avec égalité uniquement lorsque $(x - 2)^2 = 0$, c'est-à-dire $x = 2$. Le minimum est donc bien -1 , atteint en $x = 2$ — et cette fois c'est certain.

e) Le bilan par question :

- a) la **formule** : seule à permettre le calcul exact des sept images ;
- b) le **tableau** : il fournit les points à placer ;
- c) la **courbe** pour voir, la **formule factorisée** pour prouver ;
- d) la **courbe** pour conjecturer, la **forme canonique** pour démontrer.

La conclusion de la plaquette. Les trois représentations ne se remplacent pas, elles se **complètent**. La courbe et le tableau servent à **conjecturer** — voir l'allure, deviner un minimum, compter des solutions. La formule, et surtout la **bonne écriture** de la formule (factorisée pour les racines, canonique pour l'extremum), sert à **démontrer**. Une bonne copie fait les deux : elle observe, puis elle prouve.

Réponse. a) 8 ; 3 ; 0 ; -1 ; 0 ; 3 ; 8 — b) cloche de point le plus bas $(2; -1)$ — c) antécédents 1 et 3 — d) minimum -1 en $x = 2$ — e) courbe et tableau pour conjecturer, formule pour démontrer.