Plaquette 5 – Synthèse : problèmes de fonctions

Fonctions : généralités — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Résoudre un problème avec une fonction : la démarche.

— **Étape 1 — nommer et délimiter.** On choisit l'inconnue x, on dit ce qu'elle représente **avec son unité**, et on donne son **domaine** : une longueur est positive, une quantité est inférieure au stock, etc.

— **Étape 2 — exprimer.** On écrit la grandeur demandée en fonction de x, puis on **développe ou réduit** si c'est utile. Les formules qui reviennent :

$$P_{\text{rectangle}} = 2(L + \ell) \qquad A_{\text{rectangle}} = L \times \ell \qquad V_{\text{pavé}} = A_{\text{base}} \times h$$

— **Étape 3 — exploiter**, selon ce que demande la question :

une valeur → calculer une image une condition → résoudre une équation ou une inéquation

comparer deux offres → résoudre $f(x) = g(x)$ un optimum → tableau, graphique, ou forme fournie

— **Chercher un optimum en Seconde.** Trois moyens seulement : un **tableau de valeurs** (on repère où la grandeur est la plus grande), une **lecture graphique**, ou une **forme donnée par l'énoncé** du type $a(x - \alpha)^2 + \beta$, qui donne l'extremum β en $x = \alpha$ grâce au signe du carré.

— **Étape 4 — conclure.** Une phrase en français, avec l'unité, et un **retour au contexte** : on écarte les solutions qui n'ont pas de sens (longueur négative, quantité non entière quand elle doit l'être).

— ⚠ **Le domaine n'est pas décoratif.** Une solution d'équation hors du domaine n'est pas une réponse. On le précise **avant** de calculer, pas après.

Correction de l'exercice 1 – L'aire d'un rectangle de périmètre fixé

a) Le périmètre vaut 2 × (largeur + longueur), donc

$$2(x + L) = 24 \Leftrightarrow x + L = 12 \Leftrightarrow L = 12 - x$$

Pour que le rectangle existe, il faut $x > 0$ et $L > 0$, soit $12 - x > 0$: les valeurs possibles sont $0 < x < 12$.

b) L'aire est le produit des deux dimensions :

$$A(x) = x(12 - x) = 12x - x^2$$

c) On calcule les cinq valeurs :

x	2	4	6	8	10
$A(x)$	20	32	36	32	20

L'aire semble maximale pour $x = 6$, où elle vaut 36 cm². Le tableau est d'ailleurs symétrique autour de $x = 6$, ce qui renforce la conjecture.

d) La forme fournie permet de **démontrer** :

$$A(x) = -(x - 6)^2 + 36$$

Pour tout x, $(x - 6)^2 \geq 0$, donc $-(x - 6)^2 \leq 0$ et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$A(x) \leq 36$$

avec égalité **uniquement** lorsque $(x-6)^2 = 0$, c'est-à-dire $x = 6$. L'aire maximale est donc bien 36 cm², atteinte pour une largeur de 6 cm.

Le rectangle optimal mesure alors 6 cm sur $12 - 6 = 6$ cm : c'est un **carré**.

Le résultat à connaître. À périmètre fixé, le rectangle d'aire maximale est le carré. La forme canonique fournie par l'énoncé est ce qui transforme la conjecture du tableau en preuve.

Pourquoi le tableau ne suffisait pas. Il ne teste que cinq valeurs : rien n'y garantit que l'aire ne dépasse pas 36 pour $x = 6{,}3$, par exemple. Seule l'inégalité de d) le prouve pour **tous** les x.

Réponse. a) $L = 12 - x$ avec $0 < x < 12$ — b) $A(x) = x(12-x) = 12x - x^2$ — c) 20 ; 32 ; 36 ; 32 ; 20, maximum conjecturé 36 cm² — d) $A(x) \leq 36$ car un carré est positif, avec égalité en $x = 6$ (carré de côté 6 cm).

Correction de l'exercice 2 – La boîte découpée dans un carré

a) Après découpe et pliage, la **hauteur** de la boîte est x, et le fond est un carré de côté $10 - 2x$ (on retire x de chaque côté).

Pour que la boîte existe, il faut $x > 0$ et $10 - 2x > 0$, soit $x < 5$. Les valeurs possibles sont donc

$$0 < x < 5$$

b) Le volume d'un pavé est l'aire de la base multipliée par la hauteur :

$$V(x) = (10 - 2x)^2 \times x$$

c) On calcule chaque volume, en commençant par le côté du fond :

— $x = 0{,}5$: fond 9, donc $V = 81 \times 0{,}5 = 40{,}5$;
— $x = 1$: fond 8, donc $V = 64 \times 1 = 64$;
— $x = 1{,}5$: fond 7, donc $V = 49 \times 1{,}5 = 73{,}5$;
— $x = 2$: fond 6, donc $V = 36 \times 2 = 72$;
— $x = 2{,}5$: fond 5, donc $V = 25 \times 2{,}5 = 62{,}5$.

x	0,5	1	1,5	2	2,5
$V(x)$	40,5	64	73,5	72	62,5

Le volume semble maximal pour x voisin de 1,5 cm, avec environ 73,5 cm³. Comme $V(1{,}5) > V(2)$ mais que $V(1) < V(1{,}5)$, l'optimum se situe **entre** 1 **et** 2, plus près de 1,5.

Pourquoi seulement une conjecture. Le tableau ne teste que cinq valeurs, et l'énoncé ne fournit aucune forme particulière de $V(x)$: en Seconde, on ne peut pas démontrer que 1,5 est exactement l'optimum. En affinant le pas ($x = 1{,}6$ donne $46{,}24 \times 1{,}6 \approx 73{,}98$), on s'aperçoit d'ailleurs que le vrai maximum est légèrement au-delà de 1,5.

Le piège des deux effets contraires. Quand x augmente, la hauteur grandit mais le fond se réduit **deux fois plus vite**. C'est ce conflit qui crée un optimum : ni x trop petit (boîte plate), ni x trop grand (fond minuscule).

Réponse. a) fond $10 - 2x$, hauteur x, avec $0 < x < 5$ — b) $V(x) = (10-2x)^2 x$ — c) 40,5 ; 64 ; 73,5 ; 72 ; 62,5 : volume maximal pour x voisin de 1,5 cm.

Correction de l'exercice 3 – Coût, recette et bénéfice

a) Chaque objet est vendu 9 €, donc la recette est proportionnelle au nombre d'objets :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$R(x) = 9x$$

Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût :

$$B(x) = 9x - (5x + 200) = 9x - 5x - 200 = 4x - 200$$

b) Pour 30 objets :

$$B(30) = 120 - 200 = -80$$

soit une **perte** de 80 €. Pour 80 objets :

$$B(80) = 320 - 200 = 120$$

soit un bénéfice de 120 €.

c) L'artisan réalise un bénéfice lorsque $B(x) > 0$:

$$4x - 200 > 0 \Leftrightarrow 4x > 200 \Leftrightarrow x > 50$$

Comme le nombre d'objets est un **entier**, il faut en vendre au moins **51**. Contrôle : $B(50) = 0$ (l'artisan rentre tout juste dans ses frais) et $B(51) = 204 - 200 = 4$ € ✓

Le vocabulaire économique. La valeur $x = 50$ est le **seuil de rentabilité** : c'est la production pour laquelle la recette couvre exactement le coût. En deçà, l'artisan perd de l'argent, au-delà il en gagne.

L'interprétation des deux coefficients. Dans $B(x) = 4x - 200$, le 4 est la **marge** par objet (9 € de vente moins 5 € de coût variable) et le -200 est le **coût fixe** à amortir. Il faut donc $\frac{200}{4} = 50$ objets pour l'amortir.

L'erreur d'arrondi à éviter. Répondre « 50 objets » : à 50 objets le bénéfice est **nul**, pas positif. Dans un problème de seuil strict, on prend l'entier suivant.

Réponse. a) $R(x) = 9x$ et $B(x) = 4x - 200$ — b) -80 € puis $+120$ € — c) à partir de 51 objets (seuil de rentabilité : 50).

Correction de l'exercice 4 – Comparer deux abonnements

a) Chaque formule additionne une part fixe et un prix par séance :

$$A(x) = 0{,}80x + 15 \qquad B(x) = 0{,}30x + 25$$

b) Pour 10 séances :

$$A(10) = 8 + 15 = 23\ € \qquad B(10) = 3 + 25 = 28\ €$$

La formule A est moins chère. Pour 30 séances :

$$A(30) = 24 + 15 = 39\ € \qquad B(30) = 9 + 25 = 34\ €$$

Cette fois c'est la formule B. L'ordre s'est donc inversé entre 10 et 30 séances.

c) On cherche à partir de quand $B(x) < A(x)$:

$$0{,}30x + 25 < 0{,}80x + 15 \Leftrightarrow 25 - 15 < 0{,}80x - 0{,}30x \Leftrightarrow 10 < 0{,}50x \Leftrightarrow x > 20$$

La formule B devient plus avantageuse **à partir de** 21 **séances** par mois. À exactement 20 séances, les deux coûtent le même prix :

$$A(20) = 16 + 15 = 31\ € \qquad B(20) = 6 + 25 = 31\ € \ ✓$$

La logique des deux formules. B a une part fixe plus élevée (25 € contre 15 €) mais un prix par séance plus bas (0,30 € contre 0,80 €). Elle est donc perdante au début et gagnante à l'usage intensif : c'est le principe de tout abonnement.

Le conseil concret. Quelqu'un qui vient moins de 20 fois par mois choisit A, au-delà de 20 fois il choisit B, et à exactement 20 fois cela ne change rien.

Réponse. a) $A(x) = 0{,}8x + 15$ et $B(x) = 0{,}3x + 25$ — b) 23 € contre 28 €, puis 39 € contre

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

34 € — c) à partir de 21 séances (égalité à 20 séances, 31 € chacune).

Correction de l’exercice 5 – Un enclos contre un mur

a) Le grillage couvre les **deux** côtés de longueur x et le côté parallèle au mur, de longueur y :

$$2x + y = 40 \Leftrightarrow y = 40 - 2x$$

Pour que l’enclos existe, il faut $x > 0$ et $y > 0$, soit $40 - 2x > 0$ donc $x < 20$. Les valeurs possibles sont

$$0 < x < 20$$

b) L’aire est le produit des deux dimensions :

$$A(x) = x \times (40 - 2x) = 40x - 2x^2$$

c) On utilise la forme fournie :

$$A(x) = -2(x - 10)^2 + 200$$

Pour tout x, $(x - 10)^2 \geq 0$, donc $-2(x - 10)^2 \leq 0$ et

$$A(x) \leq 200$$

avec égalité **uniquement** si $(x - 10)^2 = 0$, c’est-à-dire $x = 10$. Comme 10 appartient bien à $]0\,;20[$, l’optimum est atteignable.

L’aire maximale est donc de 200 m², obtenue pour $x = 10$ m. Le côté parallèle au mur mesure alors

$$y = 40 - 2 \times 10 = 20 \text{ m}$$

L’enclos optimal mesure 10 m sur 20 m.

Le résultat à remarquer. Contrairement au cas sans mur (où l’optimum est un carré), l’enclos adossé à un mur est **deux fois plus long que large**. Le mur « offre » un côté gratuit, ce qui déplace l’optimum.

La vérification indispensable. On contrôle toujours que la valeur optimale appartient au **domaine** : ici $10 \in]0\,;20[$ ✓ Si l’optimum de la parabole était tombé hors du domaine, la réponse aurait été à une borne.

Réponse. a) $y = 40 - 2x$ avec $0 < x < 20$ — b) $A(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$ — c) 10 m sur 20 m, pour une aire maximale de 200 m².

Correction de l’exercice 6 – Distance, vitesse et durée

a) À vitesse constante, la distance est proportionnelle au temps :

$$d(t) = 70t$$

b) 2 h 30 min correspond à 2,5 heures — et non 2,30 heures, car les minutes ne sont pas des centièmes d’heure.

$$d(2{,}5) = 70 \times 2{,}5 = 175 \text{ km}$$

c) Pour 280 km, on cherche un **antécédent** : on résout

$$70t = 280 \Leftrightarrow t = \frac{280}{70} = 4$$

Il faut 4 heures. Pour 315 km :

$$70t = 315 \Leftrightarrow t = \frac{315}{70} = 4{,}5$$

Il faut 4,5 heures, soit 4 **h** 30 **min**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

La conversion, source d'erreurs. Une durée décimale se convertit en multipliant la partie décimale par 60 : 0,5 h = 30 min, 0,25 h = 15 min, 0,75 h = 45 min. Écrire « 4,5 h = 4 h 5 min » est faux.

La particularité de cette fonction. Ici d est **linéaire** : $d(t) = 70t$, sans terme constant. Le quotient $\frac{d(t)}{t}$ vaut 70 pour toute durée : c'est la définition de la proportionnalité, et le coefficient est la vitesse.

Le contrôle de vraisemblance. 175 km en deux heures et demie, cela fait bien 70 km parcourus chaque heure ✓

Réponse. a) $d(t) = 70t$ — b) 175 km — c) 4 h pour 280 km, et 4 h 30 min pour 315 km.

Correction de l'exercice 7 – Périmètre et aire d'un carré

a) Un carré de côté x a quatre côtés égaux, et son aire est le carré du côté :

$$P(x) = 4x \qquad A(x) = x^2$$

b) Pour $x = 3$:

$$P(3) = 12 \text{ cm} \qquad A(3) = 9 \text{ cm}^2$$

Les deux nombres ne sont pas comparables directement : ils ne portent pas la même unité.

c) On résout $P(x) = A(x)$, c'est-à-dire

$$4x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0$$

Un produit est nul si l'un de ses facteurs l'est, donc $x = 0$ ou $x = 4$. Comme l'énoncé impose $x > 0$, la seule réponse est

$$x = 4$$

Contrôle : $P(4) = 16$ et $A(4) = 16$ ✓

d) Non, pas vraiment. L'égalité porte sur les **valeurs numériques** (16 et 16), mais les grandeurs sont de natures différentes : 16 cm de périmètre et 16 cm² d'aire. Comparer une longueur à une surface n'a pas de sens physique.

D'ailleurs, le résultat **dépend de l'unité choisie** : si l'on mesure en millimètres, le même carré a un périmètre de 160 mm et une aire de 1 600 mm², qui ne sont plus égaux. C'est le signe qu'il s'agit d'une coïncidence d'écriture, non d'une propriété géométrique.

L'erreur à éviter en c). Diviser les deux membres par x pour obtenir $4 = x$: cela perd la solution $x = 0$. Ici elle est de toute façon écartée par le domaine, mais le réflexe reste dangereux — on **factorise**, on ne divise pas par une quantité qui peut être nulle.

Réponse. a) $P(x) = 4x$ et $A(x) = x^2$ — b) 12 cm et 9 cm² — c) $x = 4$ — d) non : l'égalité est numérique, pas physique, et elle dépend de l'unité.

Correction de l'exercice 8 – Convertir des températures

a) On calcule les deux images :

$$F(20) = 1{,}8 \times 20 + 32 = 36 + 32 = 68 \text{ °F}$$

$$F(-10) = 1{,}8 \times (-10) + 32 = -18 + 32 = 14 \text{ °F}$$

Attention au signe : $-18 + 32 = +14$, la température Fahrenheit reste positive.

b) On cherche un **antécédent** : on résout $F(c) = 98{,}6$.

$$1{,}8c + 32 = 98{,}6 \Leftrightarrow 1{,}8c = 66{,}6 \Leftrightarrow c = \frac{66{,}6}{1{,}8} = 37$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Il s'agit de 37 °C — la température du corps humain.

c) On cherche c tel que $F(c) = c$:

$$1{,}8c + 32 = c \Leftrightarrow 1{,}8c - c = -32 \Leftrightarrow 0{,}8c = -32 \Leftrightarrow c = -40$$

Oui : −40 °C correspond exactement à −40 °F. Contrôle :

$$F(-40) = 1{,}8 \times (-40) + 32 = -72 + 32 = -40 \ \checkmark$$

L'interprétation graphique de c). On a résolu $F(c) = c$, c'est-à-dire cherché l'intersection de la droite de F avec la droite d'équation $y = x$. Comme les deux droites ont des coefficients différents (1,8 et 1), elles se coupent en **exactement un** point : il existe une seule température de ce type.

Le sens des deux coefficients. Le 1,8 traduit l'écart d'échelle (un degré Celsius vaut 1,8 degré Fahrenheit) et le 32 le décalage d'origine (0 °C correspond à 32 °F). Une conversion n'est donc **pas** une proportionnalité : 40 °C ne fait pas le double de 20 °C en Fahrenheit (104 °F contre 68 °F).

Réponse. a) 68 °F et 14 °F — b) 37 °C — c) oui, −40 : −40 °C = −40 °F.

Correction de l'exercice 9 – Deux remises successives

a) Une remise de 20 % laisse 80 % du prix, donc multiplie par 0,80. Une remise de 10 % laisse 90 %, donc multiplie par 0,90. Les deux s'appliquent l'une après l'autre :

$$f(p) = p \times 0{,}80 \times 0{,}90 = 0{,}72p$$

b) Pour $p = 80$:

$$f(80) = 0{,}72 \times 80 = 57{,}60 \ €$$

On peut le vérifier étape par étape : 80 × 0,8 = 64 €, puis 64 × 0,9 = 57,60 € ✓

c) Non. Le prix final est $0{,}72p$, ce qui correspond à une remise globale de

$$1 - 0{,}72 = 0{,}28 \quad \text{soit } 28\ \%$$

et non 30 %. La différence vient de ce que la seconde remise porte sur un prix **déjà réduit** : les 10 % ne s'appliquent pas aux 80 € initiaux mais aux 64 € restants, soit 6,40 € au lieu de 8 €.

Sur l'exemple : 30 % de remise donnerait 80 × 0,70 = 56 €, soit 1,60 € de moins que le prix réel de 57,60 €.

La règle à retenir. Les pourcentages de remise ne s'**additionnent** pas : on **multiplie** les coefficients. Deux remises de 20 % et 10 % équivalent à une seule remise de 28 %.

Le contrôle rapide. Le coefficient global est toujours plus grand que celui obtenu en additionnant les remises (0,72 > 0,70), donc la remise réelle est toujours **inférieure** à la somme des remises annoncées. Un client qui additionne se croit toujours mieux traité qu'il ne l'est.

Réponse. a) $f(p) = 0{,}72p$ — b) 57,60 € — c) non, cela correspond à 28 % : les coefficients se multiplient, les pourcentages ne s'additionnent pas.

Correction de l'exercice 10 – Un tarif par tranches

a) On identifie la tranche de chaque masse :

— 80 g est dans la première tranche (jusqu'à 100 g) : 1,50 € ;
— 150 g est dans la deuxième (100 à 250 g) : 3 € ;
— 400 g est dans la troisième (250 à 500 g) : 5 €.

b) Deux envois de 150 g coûtent 2 × 3 = 6 €, alors qu'un envoi unique de 300 g coûte 5 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Il est donc **moins cher** de faire un seul envoi de 300 g que deux envois de 150 g, alors que la masse totale est la même.

$$6\ € > 5\ €$$

C'est une conséquence directe du tarif par tranches : chaque envoi paie le prix de sa tranche, quel que soit le nombre d'envois. Regrouper est presque toujours plus économique.

c) L'allure est celle d'un **escalier** : trois segments horizontaux (à 1,50 €, 3 € et 5 €) séparés par deux sauts verticaux, aux masses 100 g et 250 g.

Ce n'est **pas** une fonction affine : sa représentation n'est pas une droite. C'est une fonction **constante par morceaux** — ou « en escalier ». Elle est toutefois **croissante** au sens large : une masse plus grande ne coûte jamais moins cher.

Le vocabulaire. « Croissante » n'impose pas que la courbe monte sans cesse : des plateaux sont autorisés. C'est pourquoi un tarif par tranches est bien une fonction croissante, même si elle est constante sur de larges intervalles.

Le piège des bornes. L'énoncé précise « de 100 g **exclus** à 250 g » : un envoi de 100 g pile coûte 1,50 € et non 3 €. Ces mentions décident du tarif aux valeurs charnières, il faut les lire attentivement.

Réponse. a) 1,50 € ; 3 € ; 5 € — b) non : 6 € contre 5 €, regrouper est plus économique — c) une fonction en escalier, croissante mais non affine.

Correction de l'exercice 11 – Optimiser par lecture graphique

a) Le bénéfice est nul là où la courbe **coupe l'axe des abscisses**. On lit deux valeurs :

$$q = 2 \qquad \text{et} \qquad q = 8$$

soit 200 et 800 articles produits.

b) L'entreprise est bénéficiaire quand $B(q) > 0$, c'est-à-dire quand la courbe est **au-dessus** de l'axe des abscisses. C'est le cas **entre** les deux valeurs précédentes :

$$2 < q < 8$$

soit entre 200 et 800 articles. En dehors, l'entreprise est déficitaire : trop peu de production ne couvre pas les frais fixes, trop de production coûte plus qu'elle ne rapporte.

c) Le point le plus haut de la courbe se situe à l'abscisse $q = 5$, à la hauteur 4,5. Le bénéfice maximal est donc de 4,5 centaines d'euros, soit

$$450\ €, \text{ pour } 500 \text{ articles produits}$$

Le contrôle par la symétrie. L'abscisse du sommet est la **moyenne** des deux valeurs où le bénéfice est nul : $\frac{2+8}{2} = 5$ ✓ C'est une vérification gratuite sur toute courbe en forme de cloche.

L'attention aux unités. L'axe des abscisses est en **centaines d'articles** et celui des ordonnées en **centaines d'euros** : lire 5 et 4,5 signifie 500 articles et 450 €. Oublier la conversion est l'erreur la plus fréquente sur ce type d'énoncé.

Pourquoi il existe un optimum. Produire plus augmente la recette mais aussi les coûts, et au-delà d'un certain volume les seconds croissent plus vite que la première. D'où les deux seuils de rentabilité et le maximum entre les deux.

Réponse. a) pour $q = 2$ et $q = 8$, soit 200 et 800 articles — b) entre 200 et 800 articles — c) 500 articles, pour un bénéfice maximal de 450 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Remplir un récipient

a) Le volume initial est 300 litres, et chaque minute ajoute 25 litres :

$$V(t) = 25t + 300$$

Le coefficient 25 est le **débit**, en litres par minute : c'est ce qui s'ajoute à chaque unité de temps. Le terme 300 est le **volume initial**, présent avant l'ouverture du robinet — c'est $V(0)$.

b) Un quart d'heure vaut 15 minutes :

$$V(15) = 25 \times 15 + 300 = 375 + 300 = 675 \text{ litres}$$

c) On cherche l'instant où le volume atteint 1 800 litres :

$$25t + 300 = 1\,800 \Leftrightarrow 25t = 1\,500 \Leftrightarrow t = 60$$

Le bassin sera plein au bout de 60 minutes, soit **une heure**. Il débordera donc à partir de la soixante et unième minute.

Le contrôle de vraisemblance. Il faut ajouter $1\,800 - 300 = 1\,500$ litres à raison de 25 litres par minute, soit $\frac{1\,500}{25} = 60$ minutes ✓ Le calcul par l'équation et le raisonnement direct concordent.

La distinction entre les deux coefficients. Le débit (25) donne la **pente** : il dit à quelle vitesse le volume croît. Le volume initial (300) donne l'**ordonnée à l'origine** : il dit d'où l'on part. Deux bassins de même débit mais de contenus initiaux différents se remplissent à la même vitesse, mais pas en même temps.

La limite du modèle. L'expression $V(t) = 25t + 300$ n'a de sens que tant que le bassin n'est pas plein, c'est-à-dire sur $[0\,;60]$. Au-delà, l'eau débordant, le volume dans le bassin reste à 1 800 litres : la fonction cesse d'être affine.

Réponse. a) $V(t) = 25t + 300$: 25 est le débit (L/min), 300 le volume initial — b) 675 litres — c) au bout de 60 minutes, soit une heure.

Correction de l'exercice 13 – Choisir selon la valeur de x

a) Pour 10 affiches :

$$f(10) = 20 + 60 = 80\ € \qquad g(10) = 35 + 30 = 65\ €$$

L'imprimeur B est moins cher. Pour 40 affiches :

$$f(40) = 80 + 60 = 140\ € \qquad g(40) = 140 + 30 = 170\ €$$

Cette fois l'imprimeur A est moins cher : l'ordre s'est inversé.

b) On résout $f(x) = g(x)$:

$$2x + 60 = 3{,}50x + 30 \Leftrightarrow 60 - 30 = 3{,}50x - 2x \Leftrightarrow 30 = 1{,}50x \Leftrightarrow x = 20$$

Les deux tarifs sont égaux pour 20 **affiches**. Contrôle : $f(20) = 40 + 60 = 100$ € et $g(20) = 70 + 30 = 100$ € ✓

c) Le conseil se déduit des deux questions précédentes :

— **moins de** 20 **affiches** : choisir l'imprimeur **B**, dont la part fixe est plus faible (30 € contre 60 €) ;
— **exactement** 20 **affiches** : les deux se valent, à 100 € ;
— **plus de** 20 **affiches** : choisir l'imprimeur **A**, dont le prix à l'unité est plus bas (2 € contre 3,50 €).

La logique des deux tarifs. A a une part fixe élevée mais un prix unitaire bas : il est fait pour les gros tirages. B a une part fixe faible mais un prix unitaire élevé : il est fait pour

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

les petites séries. Le point d'égalité, 20 affiches, est le **seuil de bascule**.

L'interprétation graphique. Les deux droites se croisent au point $(20\,;100)$. Avant ce point, la droite de g est en dessous ; après, c'est celle de f. Résoudre $f(x) = g(x)$, c'est chercher l'abscisse de ce croisement.

Réponse. a) 80 € contre 65 €, puis 140 € contre 170 € — b) 20 affiches (100 € chacun) — c) B en dessous de 20 affiches, A au-delà.

Correction de l'exercice 14 – Un problème avec tableau de valeurs

a) On soustrait les deux hauteurs :

$$h(30) - h(10) = 41 - 14 = 27 \text{ cm}$$

Le plant a grandi de 27 cm en vingt jours.

b) Sur chaque période de dix jours, la croissance moyenne quotidienne est la différence de hauteur divisée par 10 :

Période	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
Croissance (cm)	9	12	15	11	6
Par jour (cm)	0,9	1,2	1,5	1,1	0,6

Détail pour la première : $\dfrac{14-5}{10} = 0{,}9$ cm par jour.

c) La croissance a été la plus rapide entre le **vingtième et le trentième jour** (1,5 cm par jour), et la plus lente entre le **quarantième et le cinquantième** (0,6 cm par jour).

Le plant accélère d'abord, atteint son rythme maximal vers le vingt-cinquième jour, puis ralentit nettement. C'est un comportement classique : la croissance s'essouffle quand la plante approche de sa taille adulte.

Ce que le tableau ne dit pas. La hauteur n'est connue que tous les dix jours : les croissances calculées sont des **moyennes** sur la période, pas des vitesses instantanées. Le plant a pu grandir irrégulièrement à l'intérieur de chaque intervalle.

La différence avec une fonction affine. Si la croissance était constante, toutes les valeurs de la dernière ligne seraient égales et h serait affine. Ici elles varient de 0,6 à 1,5 : le modèle affine ne convient pas, et il serait faux d'extrapoler linéairement au-delà du cinquantième jour.

Réponse. a) 27 cm — b) 0,9 ; 1,2 ; 1,5 ; 1,1 ; 0,6 cm par jour — c) la plus rapide entre 20 et 30 jours, la plus lente entre 40 et 50 : la croissance ralentit en fin de période.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la clôture d'un potager

a) Le périmètre vaut $2(x + L) = 60$, donc

$$x + L = 30 \Leftrightarrow L = 30 - x$$

Pour que le potager existe, il faut $x > 0$ et $30 - x > 0$, soit

$$0 < x < 30$$

b) L'aire est le produit des deux dimensions :

$$A(x) = x(30 - x) = 30x - x^2$$

c) On calcule les cinq valeurs :

$$A(5) = 150 - 25 = 125 \qquad A(10) = 300 - 100 = 200 \qquad A(15) = 450 - 225 = 225$$

$$A(20) = 600 - 400 = 200 \qquad A(25) = 750 - 625 = 125$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

x	5	10	15	20	25
$A(x)$	125	200	225	200	125

L'aire semble maximale pour $x = 15$, où elle vaut 225 m². Le tableau est symétrique autour de $x = 15$, ce qui renforce la conjecture.

d) Avec la forme fournie, $A(x) = -(x - 15)^2 + 225$:

pour tout x, $(x - 15)^2 \geq 0$, donc $-(x - 15)^2 \leq 0$ et

$$A(x) \leq 225$$

avec égalité **uniquement** lorsque $(x - 15)^2 = 0$, c'est-à-dire $x = 15$. Comme $15 \in]0\,;30[$, l'optimum est atteignable.

L'aire maximale est donc de 225 m², pour une largeur de 15 m et une longueur de $30 - 15 = 15$ m : le potager optimal est un **carré** de 15 m de côté.

e) Pour $x = 10$: le tableau donne $A(10) = 200$ m², ce qui atteint exactement le minimum souhaité — donc $x = 10$ **convient**.

Pour $x = 8$:

$$A(8) = 240 - 64 = 176 \text{ m}^2$$

Or $176 < 200$: la largeur $x = 8$ m ne convient **pas**. Le tableau le laissait prévoir, puisque l'aire décroît quand on s'éloigne de 15 : entre $x = 5$ (125 m²) et $x = 10$ (200 m²), la valeur $x = 8$ donne nécessairement moins de 200 m².

On peut même préciser la plage acceptable : l'aire vaut au moins 200 m² pour x compris entre 10 et 20, par symétrie du tableau.

Le bilan de la plaquette. Quatre gestes, toujours les mêmes : **nommer** l'inconnue avec son domaine, **exprimer** la grandeur, **exploiter** (image, équation, tableau, forme fournie), **conclure** en français avec les unités. Et un réflexe : une conjecture lue dans un tableau ne devient une preuve que par le calcul — ici, grâce au signe d'un carré.

Réponse. a) $L = 30 - x$ avec $0 < x < 30$ — b) $A(x) = x(30 - x)$ — c) 125 ; 200 ; 225 ; 200 ; 125 — d) aire maximale 225 m² pour un carré de 15 m de côté — e) $x = 10$ convient (200 m²), $x = 8$ non (176 m²).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).