

Plaquette 5 - Synthèse : problèmes de fonctions

Fonctions : généralités — Seconde

Exercices

Méthode

Dernière plaquette : les fonctions au service d'un **problème**. La démarche est toujours la même, et c'est elle qu'il faut automatiser — **nommer** l'inconnue et préciser son **domaine**, **exprimer** la grandeur demandée en fonction de cette inconnue, puis **exploiter** cette fonction selon la question : calculer une image, résoudre une équation, comparer deux expressions, chercher un optimum. En Seconde, on cherche un optimum par **tableau de valeurs**, par **lecture graphique**, ou grâce à une forme de l'expression **fournie par l'énoncé** — la dérivée n'existe pas encore. Et l'on termine toujours par une **phrase en français**, avec les unités : une inconnue de 6 ne veut rien dire, « le côté doit mesurer 6 cm » est une réponse.

Exercice 1 - L'aire d'un rectangle de périmètre fixé

Un rectangle a un périmètre de 24 cm. On note x la largeur, en centimètres.

- Exprimer la longueur en fonction de x , et donner les valeurs possibles de x .
- Montrer que l'aire est $A(x) = 12x - x^2$.
- Compléter le tableau de valeurs, puis conjecturer l'aire maximale.

x	2	4	6	8	10
$A(x)$	?	?	?	?	?

- On admet que $A(x) = -(x - 6)^2 + 36$. Démontrer la conjecture.

Exercice 2 - La boîte découpée dans un carré

Dans une feuille carrée de 10 cm de côté, on découpe un carré de côté x dans chaque coin, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.

- Exprimer les dimensions de la boîte en fonction de x , et donner les valeurs possibles de x .
- Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte.
- Compléter le tableau ci-dessous et conjecturer la valeur de x donnant le plus grand volume.

x	0,5	1	1,5	2	2,5
$V(x)$	?	?	?	?	?

Exercice 3 - Coût, recette et bénéfice

Un artisan fabrique des objets. Produire x objets coûte $C(x) = 5x + 200$ euros, et il les vend 9 € l'unité.

- Exprimer la recette $R(x)$, puis le bénéfice $B(x) = R(x) - C(x)$.
- Calculer le bénéfice pour 30 objets, puis pour 80 objets.

c) À partir de combien d'objets vendus l'artisan réalise-t-il un bénéfice ?

Exercice 4 – Comparer deux abonnements

Une salle de sport propose deux formules pour x séances par mois :

- formule A : 15 € d'abonnement, puis 0,80 € la séance ;
- formule B : 25 € d'abonnement, puis 0,30 € la séance.

- a) Exprimer les coûts $A(x)$ et $B(x)$.
- b) Calculer le coût des deux formules pour 10 séances, puis pour 30 séances.
- c) À partir de combien de séances la formule B devient-elle plus avantageuse ?

Exercice 5 – Un enclos contre un mur

Un éleveur dispose de 40 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire **appuyé contre un mur** : le mur constitue l'un des côtés, les trois autres sont grillagés. On note x la longueur, en mètres, de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur.

- a) Exprimer le côté parallèle au mur en fonction de x , et donner les valeurs possibles de x .
- b) Montrer que l'aire est $A(x) = 40x - 2x^2$.
- c) On admet que $A(x) = -2(x - 10)^2 + 200$. Déterminer les dimensions de l'enclos d'aire maximale.

Exercice 6 – Distance, vitesse et durée

Un train roule à la vitesse constante de 70 km/h. On note $d(t)$ la distance parcourue, en kilomètres, au bout de t heures.

- a) Exprimer $d(t)$.
- b) Calculer la distance parcourue en 2 h 30 min.
- c) Combien de temps faut-il pour parcourir 280 km ? Et 315 km ?

Exercice 7 – Périmètre et aire d'un carré

Soit un carré de côté x centimètres, avec $x > 0$. On note $P(x)$ son périmètre et $A(x)$ son aire.

- a) Exprimer $P(x)$ et $A(x)$.
- b) Calculer $P(3)$ et $A(3)$, avec les unités.
- c) Pour quelle valeur de x le périmètre et l'aire ont-ils la même valeur numérique ?
- d) Cette égalité a-t-elle un sens physique ?

Exercice 8 – Convertir des températures

Pour convertir une température de degrés Celsius en degrés Fahrenheit, on utilise la fonction F définie par $F(c) = 1,8c + 32$.

- a) Convertir 20 °C et -10 °C en degrés Fahrenheit.

- b) À quelle température Celsius correspond $98,6^{\circ}\text{F}$?
- c) Existe-t-il une température qui s'exprime par le **même nombre** dans les deux unités ?

Exercice 9 – Deux remises successives

Un article coûte p euros. Un magasin applique une remise de 20 %, puis une seconde remise de 10 % sur le prix déjà réduit.

- a) Exprimer le prix final $f(p)$ en fonction de p .
- b) Calculer le prix final d'un article à 80 €.
- c) Les deux remises correspondent-elles à une remise globale de 30 % ? Justifier.

Exercice 10 – Un tarif par tranches

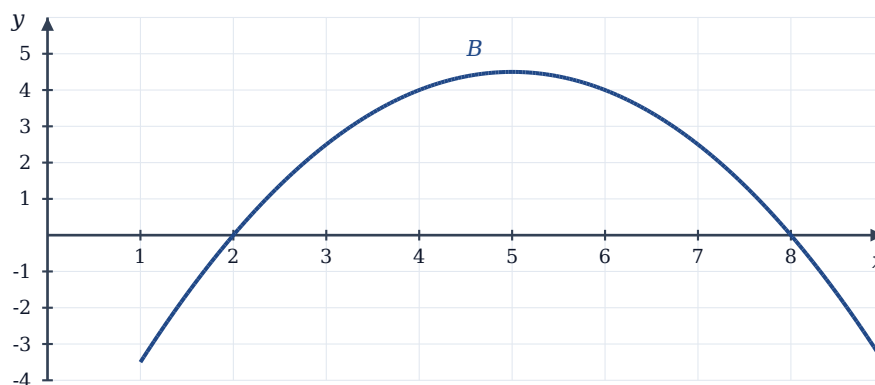
Un envoi postal est facturé selon la masse m (en grammes) : 1,50 € jusqu'à 100 g, 3 € de 100 g exclus à 250 g, et 5 € de 250 g exclus à 500 g.

- a) Calculer le tarif pour un envoi de 80 g, de 150 g, puis de 400 g.
- b) Deux envois de 150 g coûtent-ils le même prix qu'un envoi de 300 g ? Commenter.
- c) Représenter l'allure du tarif en fonction de la masse. Est-ce une fonction affine ?

Exercice 11 – Optimiser par lecture graphique

Le graphique ci-dessous donne le bénéfice B (en centaines d'euros) d'une entreprise en fonction du nombre q d'articles produits (en centaines).

- a) Pour quelles productions le bénéfice est-il nul ?
- b) Pour quelles productions l'entreprise est-elle bénéficiaire ?
- c) Quelle production rend le bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice, en euros ?



Bénéfice (centaines d'euros) selon la production (centaines d'articles).

Exercice 12 – Remplir un récipient

Un bassin contient déjà 300 litres d'eau. On ouvre un robinet qui débite 25 litres par minute. On note $V(t)$ le volume d'eau, en litres, au bout de t minutes.

- a) Exprimer $V(t)$, et préciser ce que représentent les deux coefficients.

- b) Quel volume contient le bassin au bout d'un quart d'heure ?
- c) Le bassin a une capacité de 1 800 litres. Au bout de combien de temps débordera-t-il ?

Exercice 13 – Choisir selon la valeur de x

Deux imprimeurs proposent des tarifs pour x affiches :

- imprimeur A : $f(x) = 2x + 60$ euros ;
- imprimeur B : $g(x) = 3,50x + 30$ euros.

- a) Calculer le prix des deux imprimeurs pour 10 affiches, puis pour 40 affiches.
- b) Déterminer le nombre d'affiches pour lequel les deux tarifs sont égaux.
- c) Conseiller un client selon le nombre d'affiches qu'il souhaite.

Exercice 14 – Un problème avec tableau de valeurs

Une entreprise mesure la hauteur h (en cm) d'un plant de tomate en fonction du nombre j de jours depuis la plantation.

j	0	10	20	30	40	50
$h(j)$	5	14	26	41	52	58

- a) De combien le plant a-t-il grandi entre le dixième et le trentième jour ?
- b) Calculer la croissance moyenne par jour sur chacune des cinq périodes de dix jours.
- c) Sur quelle période la croissance a-t-elle été la plus rapide ? La plus lente ? Commenter.

Exercice 15 – Synthèse : la clôture d'un potager

Un jardinier veut délimiter un potager rectangulaire de 60 m de périmètre. On note x la largeur, en mètres.

- a) Exprimer la longueur en fonction de x , et préciser les valeurs possibles de x .
- b) Montrer que l'aire du potager est $A(x) = 30x - x^2$.
- c) Compléter le tableau et conjecturer l'aire maximale.

x	5	10	15	20	25
$A(x)$	?	?	?	?	?

- d) On admet que $A(x) = -(x - 15)^2 + 225$. Démontrer la conjecture et donner les dimensions du potager optimal.
- e) Le jardinier souhaite une aire d'au moins 200 m². Vérifier que $x = 10$ convient, et déterminer si $x = 8$ convient également.