Plaquette 5 – Synthèse : problèmes de fonctions

Fonctions : généralités — Seconde

Exercices

Méthode

Dernière plaquette : les fonctions au service d'un **problème**. La démarche est toujours la même, et c'est elle qu'il faut automatiser — **nommer** l'inconnue et préciser son **domaine**, **exprimer** la grandeur demandée en fonction de cette inconnue, puis **exploiter** cette fonction selon la question : calculer une image, résoudre une équation, comparer deux expressions, chercher un optimum. En Seconde, on cherche un optimum par **tableau de valeurs**, par **lecture graphique**, ou grâce à une forme de l'expression **fournie par l'énoncé** — la dérivée n'existe pas encore. Et l'on termine toujours par une **phrase en français**, avec les unités : une inconnue de 6 ne veut rien dire, « le côté doit mesurer 6 cm » est une réponse.

Exercice 1 – L'aire d'un rectangle de périmètre fixé

Un rectangle a un périmètre de 24 cm. On note x la largeur, en centimètres.

a) Exprimer la longueur en fonction de x, et donner les valeurs possibles de x.

b) Montrer que l'aire est $A(x) = 12x - x^2$.

c) Compléter le tableau de valeurs, puis conjecturer l'aire maximale.

x	2	4	6	8	10
$A(x)$	?	?	?	?	?

d) On admet que $A(x) = -(x-6)^2 + 36$. Démontrer la conjecture.

Exercice 2 – La boîte découpée dans un carré

Dans une feuille carrée de 10 cm de côté, on découpe un carré de côté x dans chaque coin, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.

a) Exprimer les dimensions de la boîte en fonction de x, et donner les valeurs possibles de x.

b) Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte.

c) Compléter le tableau ci-dessous et conjecturer la valeur de x donnant le plus grand volume.

x	0,5	1	1,5	2	2,5
$V(x)$	?	?	?	?	?

Exercice 3 – Coût, recette et bénéfice

Un artisan fabrique des objets. Produire x objets coûte $C(x) = 5x + 200$ euros, et il les vend 9 € l'unité.

a) Exprimer la recette $R(x)$, puis le bénéfice $B(x) = R(x) - C(x)$.

b) Calculer le bénéfice pour 30 objets, puis pour 80 objets.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) À partir de combien d'objets vendus l'artisan réalise-t-il un bénéfice ?

Exercice 4 – Comparer deux abonnements

Une salle de sport propose deux formules pour x séances par mois :

— formule A : 15 € d'abonnement, puis 0,80 € la séance ;
— formule B : 25 € d'abonnement, puis 0,30 € la séance.

a) Exprimer les coûts $A(x)$ et $B(x)$.

b) Calculer le coût des deux formules pour 10 séances, puis pour 30 séances.

c) À partir de combien de séances la formule B devient-elle plus avantageuse ?

Exercice 5 – Un enclos contre un mur

Un éleveur dispose de 40 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire **appuyé contre un mur** : le mur constitue l'un des côtés, les trois autres sont grillagés. On note x la longueur, en mètres, de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur.

a) Exprimer le côté parallèle au mur en fonction de x, et donner les valeurs possibles de x.

b) Montrer que l'aire est $A(x) = 40x - 2x^2$.

c) On admet que $A(x) = -2(x-10)^2 + 200$. Déterminer les dimensions de l'enclos d'aire maximale.

Exercice 6 – Distance, vitesse et durée

Un train roule à la vitesse constante de 70 km/h. On note $d(t)$ la distance parcourue, en kilomètres, au bout de t heures.

a) Exprimer $d(t)$.

b) Calculer la distance parcourue en 2 h 30 min.

c) Combien de temps faut-il pour parcourir 280 km ? Et 315 km ?

Exercice 7 – Périmètre et aire d'un carré

Soit un carré de côté x centimètres, avec $x > 0$. On note $P(x)$ son périmètre et $A(x)$ son aire.

a) Exprimer $P(x)$ et $A(x)$.

b) Calculer $P(3)$ et $A(3)$, avec les unités.

c) Pour quelle valeur de x le périmètre et l'aire ont-ils la même valeur numérique ?

d) Cette égalité a-t-elle un sens physique ?

Exercice 8 – Convertir des températures

Pour convertir une température de degrés Celsius en degrés Fahrenheit, on utilise la fonction F définie par $F(c) = 1{,}8c + 32$.

a) Convertir 20 °C et -10 °C en degrés Fahrenheit.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) À quelle température Celsius correspond 98,6 °F ?

c) Existe-t-il une température qui s'exprime par le **même nombre** dans les deux unités ?

Exercice 9 – Deux remises successives

Un article coûte p euros. Un magasin applique une remise de 20 %, puis une seconde remise de 10 % sur le prix déjà réduit.

a) Exprimer le prix final $f(p)$ en fonction de p.

b) Calculer le prix final d'un article à 80 €.

c) Les deux remises correspondent-elles à une remise globale de 30 % ? Justifier.

Exercice 10 – Un tarif par tranches

Un envoi postal est facturé selon la masse m (en grammes) : 1,50 € jusqu'à 100 g, 3 € de 100 g exclus à 250 g, et 5 € de 250 g exclus à 500 g.

a) Calculer le tarif pour un envoi de 80 g, de 150 g, puis de 400 g.

b) Deux envois de 150 g coûtent-ils le même prix qu'un envoi de 300 g ? Commenter.

c) Représenter l'allure du tarif en fonction de la masse. Est-ce une fonction affine ?

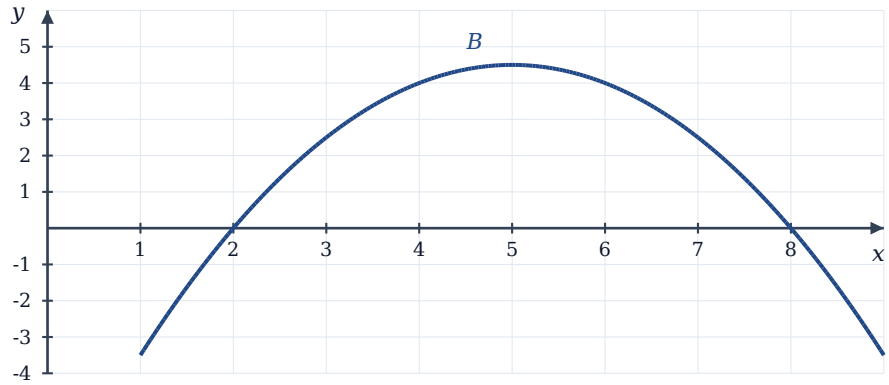
Exercice 11 – Optimiser par lecture graphique

Le graphique ci-dessous donne le bénéfice B (en centaines d'euros) d'une entreprise en fonction du nombre q d'articles produits (en centaines).

a) Pour quelles productions le bénéfice est-il nul ?

b) Pour quelles productions l'entreprise est-elle bénéficiaire ?

c) Quelle production rend le bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice, en euros ?



Bénéfice (centaines d'euros) selon la production (centaines d'articles).

Exercice 12 – Remplir un récipient

Un bassin contient déjà 300 litres d'eau. On ouvre un robinet qui débite 25 litres par minute. On note $V(t)$ le volume d'eau, en litres, au bout de t minutes.

a) Exprimer $V(t)$, et préciser ce que représentent les deux coefficients.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Quel volume contient le bassin au bout d'un quart d'heure ?

c) Le bassin a une capacité de 1 800 litres. Au bout de combien de temps débordera-t-il ?

Exercice 13 – Choisir selon la valeur de x

Deux imprimeurs proposent des tarifs pour x affiches :

— imprimeur A : $f(x) = 2x + 60$ euros ;
— imprimeur B : $g(x) = 3{,}50x + 30$ euros.

a) Calculer le prix des deux imprimeurs pour 10 affiches, puis pour 40 affiches.

b) Déterminer le nombre d'affiches pour lequel les deux tarifs sont égaux.

c) Conseiller un client selon le nombre d'affiches qu'il souhaite.

Exercice 14 – Un problème avec tableau de valeurs

Une entreprise mesure la hauteur h (en cm) d'un plant de tomate en fonction du nombre j de jours depuis la plantation.

j	0	10	20	30	40	50
$h(j)$	5	14	26	41	52	58

a) De combien le plant a-t-il grandi entre le dixième et le trentième jour ?

b) Calculer la croissance moyenne par jour sur chacune des cinq périodes de dix jours.

c) Sur quelle période la croissance a-t-elle été la plus rapide ? La plus lente ? Commenter.

Exercice 15 – Synthèse : la clôture d'un potager

Un jardinier veut délimiter un potager rectangulaire de 60 m de périmètre. On note x la largeur, en mètres.

a) Exprimer la longueur en fonction de x, et préciser les valeurs possibles de x.

b) Montrer que l'aire du potager est $A(x) = 30x - x^2$.

c) Compléter le tableau et conjecturer l'aire maximale.

x	5	10	15	20	25
$A(x)$	?	?	?	?	?

d) On admet que $A(x) = -(x - 15)^2 + 225$. Démontrer la conjecture et donner les dimensions du potager optimal.

e) Le jardinier souhaite une aire d'au moins 200 m². Vérifier que $x = 10$ convient, et déterminer si $x = 8$ convient également.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).