

Plaquette 3 – Variations et extremums

Fonctions : généralités — Seconde

Exercices

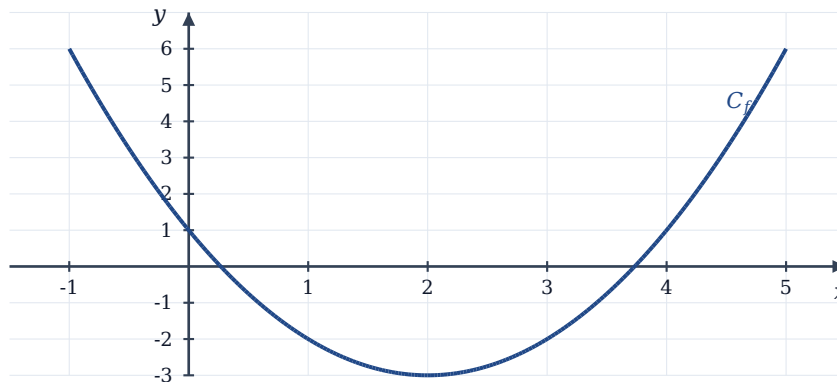
Méthode

Dire qu'une fonction **croît**, c'est dire que l'ordre est conservé : si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$. Dire qu'elle **décroît**, c'est dire que l'ordre s'inverse. Tout le chapitre tient dans ces deux phrases, et dans l'outil qui les résume : le **tableau de variations**, avec ses bornes, ses flèches et ses valeurs. Une fois ce tableau écrit, on sait comparer deux images sans les calculer, encadrer $f(x)$ sur un intervalle, et compter les solutions d'une équation $f(x) = k$. Deux précautions : la comparaison par les variations n'est valable que si les deux nombres sont **dans le même intervalle** de monotonie ; et un **extremum** est une **valeur** — on précise toujours en quel point elle est atteinte, ce qui n'est pas la même chose.

Exercice 1 – Décrire les variations d'une courbe

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie sur $[-1 ; 5]$.

- Sur quel intervalle f est-elle décroissante ?
- Sur quel intervalle f est-elle croissante ?
- Quelle est la valeur de x pour laquelle f change de sens de variation ?



La courbe de f sur $[-1 ; 5]$.

Exercice 2 – Dresser un tableau de variations

On reprend la fonction f de l'exercice précédent, définie sur $[-1 ; 5]$, dont on donne quelques valeurs : $f(-1) = 6$, $f(2) = -3$ et $f(5) = 6$.

- Dresser le tableau de variations de f sur $[-1 ; 5]$.
- Donner le minimum de f et la valeur en laquelle il est atteint.
- Donner le maximum de f et les valeurs en lesquelles il est atteint.

Exercice 3 - Écrire la définition avec des inégalités

Soit f une fonction croissante sur $[0 ; 10]$ et g une fonction décroissante sur ce même intervalle.

- Compléter : si $2 \leq 7$, alors $f(2) \dots f(7)$.
- Compléter : si $2 \leq 7$, alors $g(2) \dots g(7)$.
- On sait que $f(3) = 5$. Que peut-on dire de $f(8)$?
- On sait que $g(3) = 5$. Que peut-on dire de $g(8)$?

Exercice 4 - Comparer deux images sans les calculer

Soit f une fonction dont le tableau de variations sur $[-4 ; 6]$ est le suivant.

x	-4		1		6
variations de f	8	décroissante	-2	croissante	7

Comparer, lorsque c'est possible, les deux images de chaque couple.

- $f(-3)$ et $f(0)$
- $f(2)$ et $f(5)$
- $f(-1)$ et $f(4)$

Exercice 5 - Encadrer une image

On reprend le tableau de variations de f sur $[-4 ; 6]$: décroissante de 8 à -2 sur $[-4 ; 1]$, puis croissante de -2 à 7 sur $[1 ; 6]$.

- Encadrer $f(x)$ pour $x \in [-4 ; 1]$.
- Encadrer $f(x)$ pour $x \in [1 ; 6]$.
- Encadrer $f(x)$ pour $x \in [-4 ; 6]$.

Exercice 6 - Maximum, minimum et point d'atteinte

Le tableau de variations d'une fonction h sur $[0 ; 8]$ est le suivant.

x	0		3		6		8
variations de h	2	croissante	9	décroissante	1	croissante	4

- Donner le maximum de h sur $[0 ; 8]$ et la valeur en laquelle il est atteint.
- Donner le minimum de h sur $[0 ; 8]$ et la valeur en laquelle il est atteint.
- Un élève répond « le maximum est 3 ». Expliquer son erreur.

Exercice 7 - Un extremum atteint à une borne

Soit f définie sur $[0 ; 5]$ dont le tableau de variations est : croissante de 1 à 4 sur $[0 ; 2]$, puis décroissante de 4 à -6 sur $[2 ; 5]$.

- Donner le maximum de f et la valeur où il est atteint.
- Donner le minimum de f et la valeur où il est atteint.

c) Comparer $f(0)$ et $f(5)$, puis commenter la position du minimum.

Exercice 8 - Compléter un tableau de variations

Soit f définie sur $[-3; 4]$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$. On sait que f est décroissante sur $[-3; 1]$ et croissante sur $[1; 4]$.

- Calculer $f(-3)$, $f(1)$ et $f(4)$.
- Dresser le tableau de variations complet de f .
- En déduire le minimum de f sur $[-3; 4]$ et un encadrement de $f(x)$.

Exercice 9 - Compter les solutions avec le tableau

Le tableau de variations d'une fonction f sur $[0; 10]$ est : croissante de -1 à 7 sur $[0; 4]$, puis décroissante de 7 à 2 sur $[4; 10]$.

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ sur $[0; 10]$ pour :

- $k = 5$
- $k = 0$
- $k = 8$
- $k = 7$

Exercice 10 - Tracer une courbe compatible avec un tableau

Soit f définie sur $[-2; 4]$ dont le tableau de variations est le suivant.

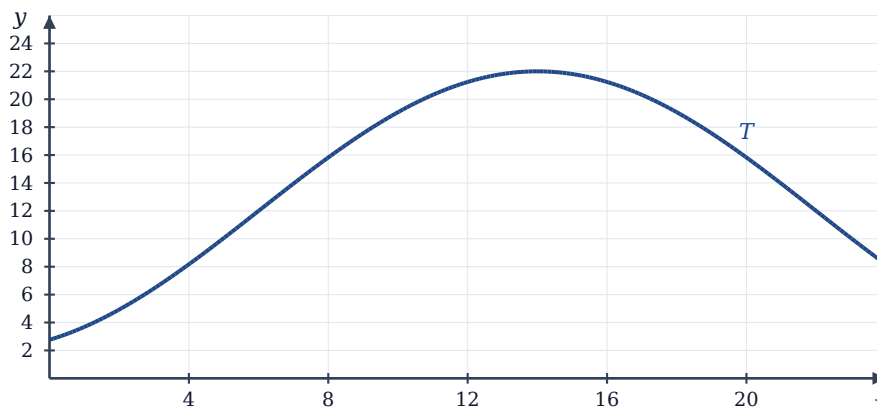
x	-2		1		4
variations de f	3	décroissante	-2	croissante	4

Tracer, dans un repère, une courbe possible pour f .

Exercice 11 - Variations en contexte

Le graphique ci-dessous donne la température T (en $^{\circ}\text{C}$) relevée dans une ville au cours d'une journée, en fonction de l'heure h .

- Décrire les variations de la température au cours de la journée.
- À quelle heure la température est-elle maximale ? Quelle est cette température ?
- Entre quelles heures la température a-t-elle baissé ?
- Comparer $T(8)$ et $T(20)$.



Température ($^{\circ}\text{C}$) en fonction de l'heure.

Exercice 12 - Fonction croissante mais pas strictement

Le tableau ci-dessous donne le tarif d'un parking selon la durée de stationnement.

Durée (h)	de 0 à 1	de 1 à 2	de 2 à 4	au-delà de 4
Tarif (€)	2	3,50	5	8

On note $P(t)$ le tarif payé pour une durée t (en heures).

- Calculer $P(0,5)$, $P(1,5)$ et $P(3)$.
- Comparer $P(2,5)$ et $P(3,5)$.
- La fonction P est-elle croissante sur $]0; 5]$? Est-elle strictement croissante ?

Exercice 13 - Deux fonctions, deux tableaux

Les fonctions f et g sont définies sur $[0; 6]$. La fonction f est croissante de 0 à 12, et la fonction g est décroissante de 10 à -2 .

- Comparer $f(1)$ et $f(5)$, puis $g(1)$ et $g(5)$.
- Que peut-on dire de $f(0)$ et $g(0)$? de $f(6)$ et $g(6)$?
- Les courbes de f et g se coupent-elles nécessairement ? Justifier.

Exercice 14 - Vrai ou faux sur les variations

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant.

- Si f est croissante sur $[0; 5]$ et si $f(2) = 3$, alors $f(4) > 3$.
- Si f est décroissante sur $[0; 5]$, alors $f(0)$ est le maximum de f sur cet intervalle.

- c) Si le maximum de f sur $[0 ; 5]$ est 7, alors l'équation $f(x) = 7$ a exactement une solution.
- d) Une fonction croissante sur $[0 ; 2]$ et croissante sur $[2 ; 4]$ est croissante sur $[0 ; 4]$.

Exercice 15 – Synthèse : étude d'une fonction sur un intervalle

Soit f définie sur $[-2 ; 5]$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. On admet que f est croissante sur $[-2 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; 5]$.

- a) Calculer $f(-2)$, $f(2)$ et $f(5)$.
- b) Dresser le tableau de variations de f sur $[-2 ; 5]$.
- c) Donner le maximum et le minimum de f , ainsi que les valeurs où ils sont atteints.
- d) Encadrer $f(x)$ pour $x \in [-2 ; 5]$.
- e) Déterminer, selon k , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.