MATHÉMATIQUES

Fonctions : généralités

Seconde

Ensemble de définition • Courbe représentative • Résolution graphique
Variations • Extremums • Optimisation • Valeur absolue • Fonction cube

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques de seconde générale et technologique** (arrêté du 26 février 2026, BO n°14 du 2 avril 2026, applicable à la rentrée 2026), parties « Représentation algébrique et graphique des fonctions » et « Variations et extrémums d'une fonction ». Il couvre :

- fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles, recherche de l'ensemble de définition ;
- courbe représentative, équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance d'un point, calcul de coordonnées ;
- résolution graphique de $f(x) = k$, $f(x) < k$, $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$;
- croissance, décroissance, monotonie, tableau de variations, maximum et minimum, problèmes d'optimisation ;
- fonctions valeur absolue et cube (définition, courbe, signe, variations, équations $f(x) = k$).

Les fonctions affines, carré, inverse et racine carrée ont leur propre chapitre.

Objectif : passer d'un registre à l'autre (formule, tableau, courbe), résoudre graphiquement et décrire les variations d'une fonction.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 La notion de fonction **3**
1.1 Quatre façons de donner une fonction 3

2 Ensemble de définition **4**

3 Courbe représentative **5**

4 Résolution graphique d'équations et d'inéquations **6**
4.1 Équations et inéquations du type $f(x) = k$, $f(x) < k$ 6
4.2 Équations et inéquations du type $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$ 6

5 Variations d'une fonction **7**
5.1 Croissance, décroissance 7
5.2 Tableau de variations 7

6 Extremums et optimisation **8**
6.1 Un problème d'optimisation 8
6.2 Approcher un extremum par balayage 9

7 Signe d'une fonction **9**

8 Deux nouvelles fonctions de référence **10**
8.1 La fonction valeur absolue 10
8.2 La fonction cube 11

9 Méthodes récapitulatives **11**

10 Fiche de synthèse **12**

11 Exercices d'application **12**

12 Corrigés des exercices **13**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. La notion de fonction

Une fonction exprime la **dépendance** d'une grandeur par rapport à une autre : l'aire d'un carré dépend de son côté, la distance parcourue dépend du temps, le prix payé dépend de la quantité achetée.

Fonction

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$. Une **fonction** f définie sur D associe à chaque nombre réel x de D **un unique** nombre réel, noté $f(x)$. On écrit

$$f : x \longmapsto f(x).$$

— D est l'**ensemble de définition** de f ;
— $f(x)$ est l'**image** de x par f ;
— si $f(a) = b$, on dit que a est **un antécédent** de b par f.

Image unique, antécédents multiples

Un nombre x de D a **une et une seule** image. En revanche, un nombre b peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents. Pour $f(x) = x^2$: 9 a deux antécédents (-3 et 3), 0 en a un seul, -1 n'en a aucun.

1.1. Quatre façons de donner une fonction

Une même fonction peut être décrite dans plusieurs **registres**. Savoir passer de l'un à l'autre est la compétence centrale du chapitre.

Un rectangle de périmètre 20 cm

Un rectangle a un périmètre de 20 cm. On note x la longueur d'un côté (en cm) : l'autre côté mesure $10 - x$ et l'aire vaut

$$A(x) = x(10 - x), \qquad x \in [0\,;10].$$

— **Formule** : $A(x) = x(10 - x)$, donc $A(3) = 3 \times 7 = 21$.
— **Tableau de valeurs** :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A(x)$	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0

— **Courbe** : l'ensemble des points $(x\,;A(x))$ (figure 1).
— **Programme** : la fonction Python ci-dessous renvoie l'aire.

```
def A(x):
    return x * (10 - x)
```

L'appel `A(3)` renvoie `21`.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

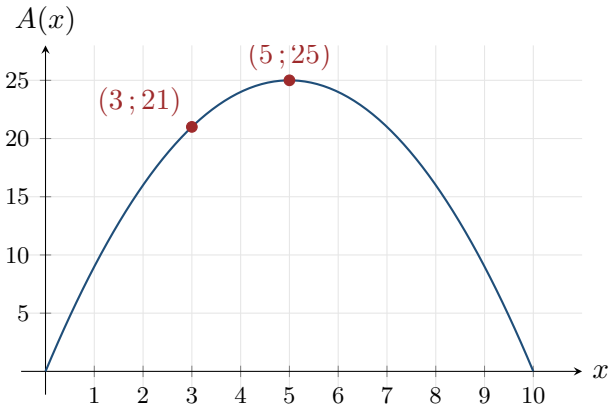


Figure 1 – Aire $A(x) = x(10 - x)$ d'un rectangle de périmètre 20 cm.

Image ou antécédent ?

« L'image de 3 » : on part de $x = 3$ et on calcule $A(3) = 21$. « Les antécédents de 21 » : on part du résultat 21 et on cherche *tous* les x tels que $A(x) = 21$. Ici il y en a deux : 3 et 7. Écrire « l'antécédent de 21 est 3 » est faux.

2. Ensemble de définition

Ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des nombres réels x pour lesquels $f(x)$ existe. Il peut être imposé par le calcul (**valeurs interdites**) ou par la **situation** modélisée.

Rechercher un ensemble de définition

1. Repérer les **quotients** : un dénominateur ne doit jamais être nul. On résout « dénominateur $= 0$ » pour trouver les valeurs interdites.
2. Repérer les **racines carrées** : la quantité sous le radical doit être positive ou nulle. On résout « quantité ≥ 0 ».
3. Tenir compte du **contexte** : une longueur, une durée, une quantité sont positives ; une quantité de pièces est entière.
4. Écrire le résultat sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles.

Trois ensembles de définition

— $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$: le dénominateur s'annule pour $x = 3$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[$.

— $g(x) = \sqrt{x+2}$: il faut $x + 2 \geq 0$, soit $x \geq -2$, donc $D_g = [-2\,;+\infty[$.

— $h(x) = \dfrac{5}{x^2-4}$: $x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = -2$ ou $x = 2$, donc

$$D_h =]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;2[\cup]2\,;+\infty[\,.$$

Dans l'exemple du rectangle, la formule $x(10 - x)$ a un sens pour tout réel, mais une longueur est positive et l'autre côté $10 - x$ aussi : le contexte impose $D = [0\,;10]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Le numérateur ne crée pas de valeur interdite

Dans $\dfrac{x-1}{x+5}$, la valeur $x=1$ est autorisée : elle donne simplement $\dfrac{0}{6}=0$. Seul le dénominateur compte : la valeur interdite est -5.

3. Courbe représentative

Courbe représentative

Dans un repère du plan, la **courbe représentative** $\mathcal{C}_f$ de f est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $x \in D_f$ et $y=f(x)$. On dit que $\mathcal{C}_f$ a pour **équation** $y=f(x)$.

Appartenance d'un point à une courbe

Le point $M(a\,;b)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $a \in D_f$ et $f(a)=b$.

Tester des points, calculer des coordonnées

Soit $f(x)=x^2-3x$ définie sur $\mathbb{R}$.

- $A(4\,;4)$: $f(4)=16-12=4$, donc $A \in \mathcal{C}_f$.
- $B(1\,;3)$: $f(1)=1-3=-2\neq 3$, donc $B \notin \mathcal{C}_f$.
- Le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse -2 a pour ordonnée $f(-2)=4+6=10$: c'est $(-2\,;10)$.
- Les points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée 0 ont une abscisse solution de $x^2-3x=0$, soit $x(x-3)=0$: ce sont $(0\,;0)$ et $(3\,;0)$.

Lire une image et des antécédents sur une courbe

- **Image de** a : on part de a sur l'axe des abscisses, on rejoint la courbe verticalement, on lit l'ordonnée du point atteint.
- **Antécédents de** b : on trace la droite horizontale d'équation $y=b$; les antécédents sont les **abscisses** de tous ses points d'intersection avec la courbe.

Une lecture graphique donne une valeur **approchée** ; seul le calcul donne une valeur exacte.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

4. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

4.1. Équations et inéquations du type $f(x) = k$, $f(x) < k$

Lecture graphique

Soit k un réel et Δ la droite d'équation $y = k$.

- Les solutions de $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de Δ.
- Les solutions de $f(x) < k$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés **strictement en dessous** de Δ ; celles de $f(x) > k$, des points situés strictement au-dessus.

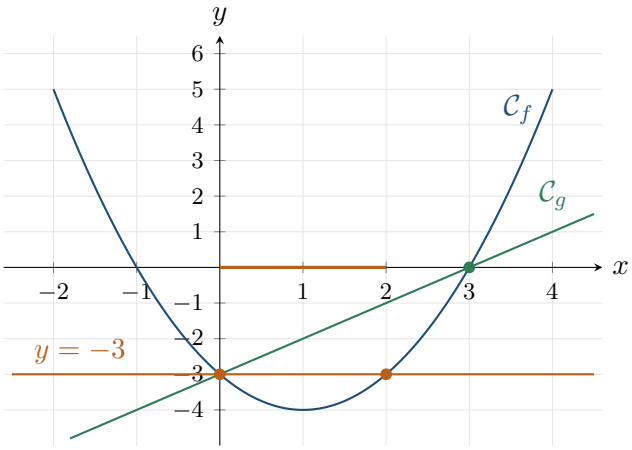


Figure 2 – $f(x) = x^2 - 2x - 3$ sur $[-2\,;4]$, la droite $y = -3$ et la droite $\mathcal{C}_g$ d'équation $y = x - 3$.

Lectures sur la figure 2

- $f(x) = -3$: la droite orange coupe $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 0 et 2. $S = \{0\,;2\}$.
- $f(x) < -3$: $\mathcal{C}_f$ est strictement sous la droite entre ces deux points. $S =]0\,;2[$ (bornes exclues car l'inégalité est stricte).
- $f(x) \geq -3$ sur $[-2\,;4]$: $S = [-2\,;0] \cup [2\,;4]$.

Contrôle par le calcul : $f(x) = -3 \iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$.

4.2. Équations et inéquations du type $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$

Position relative de deux courbes

- Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- Les solutions de $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ est **strictement en dessous** de $\mathcal{C}_g$.

Algébriquement, $f(x) < g(x) \iff f(x) - g(x) < 0$: on étudie le **signe de la différence**.

Sur la figure 2, avec $g(x) = x - 3$

Les courbes se coupent aux points $(0\,;-3)$ et $(3\,;0)$: $f(x) = g(x)$ a pour solutions 0 et 3. Entre ces abscisses, la parabole est sous la droite : $f(x) < g(x) \iff x \in]0\,;3[$.
Contrôle par le calcul :

$$f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 3 - (x - 3) = x^2 - 3x = x(x - 3).$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Ce produit s'annule en 0 et 3 et il est négatif entre ces deux valeurs (un facteur positif, l'autre négatif) : la lecture est confirmée.

Une lecture graphique se vérifie

Une lecture graphique peut être imprécise : un point d'intersection d'abscisse 0,95 ressemble beaucoup à un point d'abscisse 1. Avant de conclure, on **remplace** chaque valeur lue dans les deux expressions : ici $f(3) = 9 - 6 - 3 = 0$ et $g(3) = 0$, donc le point $(3\,;0)$ est bien commun aux deux courbes. Si les deux images diffèrent, la lecture n'était qu'une valeur approchée.

5. Variations d'une fonction

5.1. Croissance, décroissance

Fonction croissante, décroissante sur un intervalle

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans D_f.

- f est **croissante** sur I si, pour tous réels a et b de I, $a < b \implies f(a) \leq f(b)$: les images sont rangées **dans le même ordre**.
- f est **décroissante** sur I si, pour tous réels a et b de I, $a < b \implies f(a) \geq f(b)$: l'ordre est **inversé**.
- f est **monotone** sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

Avec des inégalités strictes ($f(a) < f(b)$, resp. $f(a) > f(b)$), on parle de fonction **strictement** croissante (resp. décroissante).

Graphiquement, sur un intervalle où f est croissante, la courbe **monte** quand on la parcourt de gauche à droite ; elle **descend** si f est décroissante.

5.2. Tableau de variations

Tableau de variations

Un tableau de variations résume les intervalles sur lesquels une fonction est monotone : une flèche montante pour « croissante », descendante pour « décroissante », et les images aux bornes de chaque intervalle.

De la courbe au tableau

La fonction $f(x) = x^2 - 2x - 3$ de la figure 2, sur $[-2\,;4]$, descend de $(-2\,;5)$ jusqu'à $(1\,;-4)$, puis monte jusqu'à $(4\,;5)$:

x	-2		1		4
$f(x)$	5	↘	-4	↗	5

f est décroissante sur $[-2\,;1]$ et croissante sur $[1\,;4]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Comparer deux images sans les calculer

Si a et b sont dans un même intervalle I où f est monotone :

— f croissante sur I : $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés comme a et b ;

— f décroissante sur I : ils sont rangés dans l'ordre inverse.

Avec le tableau ci-dessus : $-1{,}5 < -0{,}5$ dans $[-2\,;1]$ où f est décroissante, donc $f(-1{,}5) > f(-0{,}5)$.

Deux nombres de part et d'autre d'un changement de sens

Le tableau ne permet pas de comparer $f(0)$ et $f(3)$: 0 et 3 ne sont pas dans un même intervalle de monotonie. Il faut calculer : $f(0) = -3$ et $f(3) = 0$.

6. Extremums et optimisation

Maximum, minimum sur un intervalle

Soit f définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

— f admet un **maximum** M sur I, atteint en x_0, si $f(x_0) = M$ et, pour tout x de I, $f(x) \leq M$.

— f admet un **minimum** m sur I, atteint en x_0, si $f(x_0) = m$ et, pour tout x de I, $f(x) \geq m$.

Un maximum ou un minimum est un **extremum**.

Lecture dans un tableau de variations

Avec le tableau précédent, sur $[-2\,;4]$: le minimum de f est -4, atteint en 1 ; le maximum est 5, atteint en -2 et en 4.

La valeur et l'endroit

Le maximum est une valeur de $f(x)$ (ici 5), pas la valeur de x où il est atteint. On rédige : « le maximum de f sur $[-2\,;4]$ est 5, atteint pour $x = -2$ et $x = 4$ ».

6.1. Un problème d'optimisation

Le rectangle d'aire maximale

Reprenons $A(x) = x(10 - x)$ sur $[0\,;10]$. Le tableau de valeurs et la figure 1 suggèrent un maximum de 25, atteint pour $x = 5$. **Démontrons-le** : pour tout x de $[0\,;10]$,

$$25 - A(x) = 25 - 10x + x^2 = (x - 5)^2 \geq 0,$$

donc $A(x) \leq 25$, avec égalité si et seulement si $x = 5$. Le rectangle de périmètre 20 cm d'aire maximale est le **carré** de côté 5 cm, d'aire 25 cm^2.

Résoudre un problème d'optimisation

1. Choisir la variable x et préciser l'intervalle où elle varie (contexte).
2. Exprimer la grandeur à optimiser en fonction de x.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Conjecturer l'extremum : tableau de valeurs, courbe, calculatrice ou programme de balayage.
4. Le démontrer quand c'est possible (par exemple en étudiant le signe de $M - f(x)$).
5. Conclure dans le contexte, avec les unités.

6.2. Approcher un extremum par balayage

Algorithme de balayage

On parcourt $[a\,;b]$ avec un pas p et on garde l'abscisse qui donne la plus grande image.

```
def A(x):
    return x * (10 - x)

def balayage_max(a, b, p):
    x_max = a
    x = a
    while x <= b:
        if A(x) > A(x_max):
            x_max = x
        x = x + p
    return x_max
```

`balayage_max(0, 10, 0.1)` renvoie une valeur très proche de 5 (au calcul flottant près). Diviser le pas par 10 affine l'approximation, au prix de dix fois plus de calculs.

7. Signe d'une fonction

Signe, tableau de signes

Étudier le signe de f sur D_f, c'est déterminer pour quels x on a $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ ou $f(x) < 0$. On résume le résultat dans un **tableau de signes**.

Lecture graphique du signe

$f(x) > 0$ là où $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de l'axe des abscisses, $f(x) < 0$ là où elle est strictement en dessous ; $f(x) = 0$ aux abscisses des points où elle coupe cet axe.

Signe de $f(x) = x^2 - 2x - 3$ sur $[-2\,;4]$

La courbe de la figure 2 coupe l'axe des abscisses en -1 et 3 (en effet $f(x) = (x+1)(x-3)$) :

x	-2		-1		3		4
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour un produit ou un quotient de facteurs du premier degré, on construit le tableau de signes ligne par ligne : c'est l'objet du chapitre « Équations et inéquations ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

8. Deux nouvelles fonctions de référence

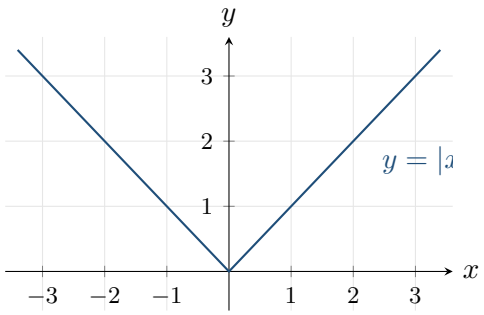
8.1. La fonction valeur absolue

Valeur absolue

La fonction **valeur absolue** est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto |x|$, où

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$|x|$ est la **distance** entre x et 0 sur la droite graduée ; plus généralement, $|x-a|$ est la distance entre x et a.



Signe et variations de la valeur absolue

- Pour tout réel x, $|x| \geq 0$, et $|x| = 0 \iff x = 0$.
- La fonction valeur absolue est **décroissante** sur $]-\infty\,;0]$ et **croissante** sur $[0\,;+\infty[$; son minimum est 0, atteint en 0.
- Sa courbe est formée de deux demi-droites, d'équations $y = -x$ pour $x \leq 0$ et $y = x$ pour $x \geq 0$.

Équations et inéquations avec une valeur absolue

Soit a un réel et r un réel strictement positif.

- $|x| = r \iff x = -r$ ou $x = r$;
- $|x-a| = r \iff x = a - r$ ou $x = a + r$;
- $|x-a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r \iff x \in [a-r\,;a+r]$.

Traduire une distance

« La température T (en °C) diffère de 20 de 1,5 au plus » s'écrit $|T-20| \leq 1{,}5$, c'est-à-dire $T \in [18{,}5\,;21{,}5]$: l'intervalle de centre 20 et de rayon 1,5.

La valeur absolue ne se distribue pas

$|x-3| \neq |x| - 3$: pour $x = 1$, $|1-3| = 2$ alors que $|1| - 3 = -2$. Et $|-x|$ vaut $|x|$, pas $-|x|$.

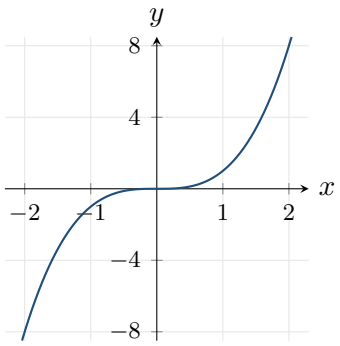
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

8.2. La fonction cube

Fonction cube

La fonction **cube** est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto x^3$.

x	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2
x^3	-8	-1	$-0{,}125$	0	$0{,}125$	1	8



Signe, variations, équation $x^3 = k$

- x^3 a le **signe de** x : négatif si $x < 0$, nul si $x = 0$, positif si $x > 0$.
- La fonction cube est **croissante** sur $\mathbb{R}$; sa courbe passe par l'origine, qui est un centre de symétrie, car $(-x)^3 = -x^3$.
- Pour tout réel k, l'équation $x^3 = k$ a **exactement une** solution. Par exemple $x^3 = 8 \iff x = 2$ et $x^3 = -27 \iff x = -3$.
- Comme la fonction est croissante : $x^3 < 8 \iff x < 2$.

Ne pas confondre avec le carré

$x^2 = 4$ a deux solutions (-2 et 2), mais $x^3 = 8$ n'en a qu'une (2), car $(-2)^3 = -8$. Et $x^3 = -8$ a une solution (-2), alors que $x^2 = -4$ n'en a aucune.

9. Méthodes récapitulatives

Reconnaître la question posée

On demande...	On fait...
l'image de a	calculer $f(a)$, ou lire l'ordonnée du point d'abscisse a
les antécédents de b	résoudre $f(x) = b$, ou lire les abscisses sur la droite $y = b$
si $M(a\,;b) \in \mathcal{C}_f$	comparer $f(a)$ et b
$f(x) < k$	abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ sous la droite $y = k$
$f(x) < g(x)$	abscisses où $\mathcal{C}_f$ est sous $\mathcal{C}_g$, ou signe de $f(x) - g(x)$
comparer $f(a)$ et $f(b)$	même intervalle de monotonie ? sinon calculer
un extremum	tableau de variations, puis démonstration si demandée

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreurs classiques

- Confondre image (axe des ordonnées) et antécédent (axe des abscisses).
- Oublier un antécédent : il faut *tous* les points d'intersection avec la droite horizontale.
- Inclure les bornes d'une inéquation stricte, ou les oublier dans une inéquation large.
- Annoncer un résultat lu sur un graphique comme exact sans le vérifier par le calcul.
- Comparer $f(a)$ et $f(b)$ avec un tableau alors que a et b sont de part et d'autre d'un changement de sens.

10. Fiche de synthèse

Fonction	associe à chaque x de D_f une **unique** image $f(x)$
Ensemble de définition	dénominateur $\neq 0$, radicande ≥ 0, contraintes du contexte
Courbe $\mathcal{C}_f$	points $(x\,;f(x))$; $M(a\,;b)\in\mathcal{C}_f \iff f(a)=b$
$f(x)=k$, $f(x)<k$	intersection avec, ou position par rapport à, la droite $y=k$
$f(x)<g(x)$	$\mathcal{C}_f$ sous $\mathcal{C}_g$; signe de $f(x)-g(x)$
Croissante sur I	$a<b \implies f(a)\leq f(b)$ (l'ordre est conservé)
Décroissante sur I	$a<b \implies f(a)\geq f(b)$ (l'ordre est inversé)
Maximum M en x_0	$f(x_0)=M$ et $f(x)\leq M$ pour tout x de I
Valeur absolue	$\lvert x-a\rvert$ = distance de x à a ; $\lvert x-a\rvert\leq r \iff x\in[a-r\,;a+r]$
Cube	croissante sur $\mathbb{R}$, x^3 du signe de x, $x^3=k$ a une seule solution

11. Exercices d'application

Exercice 1 – Ensemble de définition, image, antécédent

Soit $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f(0)$ et $f(5)$.
3. Le point $A(6\,;6{,}5)$ appartient-il à la courbe de f ?
4. Déterminer le ou les antécédents de 3.

Exercice 2 – Lectures graphiques

On reprend la fonction $f(x)=x^2-2x-3$ sur $[-2\,;4]$, représentée en bleu sur la figure 2.

1. Dresser son tableau de variations et donner ses extremums.
2. Résoudre graphiquement $f(x)=0$, puis $f(x)\leq 0$.
3. Résoudre $f(x)=5$ par le calcul (on pourra factoriser x^2-2x-8 par $x-4$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Comparer sans calculer

1. Une fonction h est décroissante sur $[0\,;5]$. Comparer $h(1{,}2)$ et $h(3{,}7)$.
2. Comparer $(-2{,}1)^3$ et $(-1{,}9)^3$ sans calculatrice.
3. Comparer $|-4{,}2|$ et $|3{,}9|$.

Exercice 4 – Valeur absolue

1. Résoudre $|x-2| \leq 3$ et représenter les solutions sur une droite graduée.
2. Résoudre $|x+1| = 4$.
3. Une pièce doit mesurer 50 mm avec une tolérance de 0,2 mm. Traduire par une inégalité avec une valeur absolue, puis par un intervalle.

Exercice 5 – Optimisation

Avec 40 m de grillage, on veut clôturer un enclos rectangulaire adossé à un mur (le côté le long du mur n'a pas besoin de grillage). On note x la largeur (côtés perpendiculaires au mur), en mètres.

1. Justifier que $x \in [0\,;20]$ et que l'aire vaut $A(x) = x(40-2x)$.
2. Calculer $A(5)$, $A(10)$ et $A(15)$. Conjecturer le maximum.
3. Démontrer que $200 - A(x) = 2(x-10)^2$, puis conclure.

12. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé.

1. Le dénominateur s'annule pour $x = 4$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\} =]-\infty\,;4[\cup]4\,;+\infty[$.
2. $f(0) = \dfrac{1}{-4} = -\dfrac{1}{4}$ et $f(5) = \dfrac{11}{1} = 11$.
3. $f(6) = \dfrac{13}{2} = 6{,}5$: oui, A appartient à la courbe.
4. On résout $\dfrac{2x+1}{x-4} = 3$ avec $x \neq 4$: $2x+1 = 3(x-4) = 3x-12$, d'où $x = 13$. Comme $13 \neq 4$, l'unique antécédent de 3 est 13. Vérification : $f(13) = \dfrac{27}{9} = 3$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé.

1. f est décroissante sur $[-2\,;1]$, croissante sur $[1\,;4]$, avec $f(-2) = 5$, $f(1) = -4$, $f(4) = 5$. Minimum : -4, atteint en 1. Maximum : 5, atteint en -2 et en 4.
2. La courbe coupe l'axe des abscisses en -1 et 3 : $f(x) = 0 \iff x \in \{-1\,;3\}$. Vérification : $f(-1) = 1+2-3 = 0$ et $f(3) = 9-6-3 = 0$. La courbe est sous l'axe entre ces points : $f(x) \leq 0 \iff x \in [-1\,;3]$.
3. $f(x) = 5 \iff x^2 - 2x - 8 = 0$. Or $(x-4)(x+2) = x^2 + 2x - 4x - 8 = x^2 - 2x - 8$, donc $f(x) = 5 \iff (x-4)(x+2) = 0 \iff x = 4$ ou $x = -2$, ce que confirme la figure.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé.

1. $1{,}2 < 3{,}7$, deux nombres de $[0\,;5]$ où h est décroissante : l'ordre s'inverse, $h(1{,}2) \geq h(3{,}7)$.
2. La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$ et $-2{,}1 < -1{,}9$, donc $(-2{,}1)^3 < (-1{,}9)^3$.
3. $|-4{,}2| = 4{,}2$ et $|3{,}9| = 3{,}9$, donc $|-4{,}2| > |3{,}9|$: $-4{,}2$ est plus loin de 0 que 3,9.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé.

1. $|x-2| \leq 3 \iff 2-3 \leq x \leq 2+3 \iff x \in [-1\,;5]$: les nombres à distance au plus 3 de 2.
2. $|x+1| = |x-(-1)| = 4 \iff x = -1-4$ ou $x = -1+4$, soit $x = -5$ ou $x = 3$.
3. En notant L la longueur en mm : $|L-50| \leq 0{,}2$, soit $L \in [49{,}8\,;50{,}2]$.

Corrigé de l'exercice 5

Corrigé.

1. Le grillage forme deux largeurs et une longueur : longueur $= 40-2x$. Une longueur est positive : $x \geq 0$ et $40-2x \geq 0$, soit $x \leq 20$. L'aire vaut largeur $\times$ longueur : $A(x) = x(40-2x)$.
2. $A(5) = 5 \times 30 = 150$, $A(10) = 10 \times 20 = 200$, $A(15) = 15 \times 10 = 150$. On conjecture un maximum de 200 m^2 pour $x = 10$.
3. $2(x-10)^2 = 2x^2 - 40x + 200$ et $200 - A(x) = 200 - 40x + 2x^2$: les deux expressions sont égales. Un carré est positif, donc $200 - A(x) \geq 0$, c'est-à-dire $A(x) \leq 200$, avec égalité pour $x = 10$. L'aire maximale est 200 m^2, obtenue avec une largeur de 10 m et une longueur de 20 m.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).