

Plaquette 3 - Agrandissements, réductions et effets d'échelle

Géométrie dans l'espace — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

La règle fondamentale. Dans un agrandissement (ou une réduction) de rapport $k > 0$:

Grandeur	Multipliée par
longueur, périmètre, diagonale	k
aire, aire latérale, aire totale	k^2
volume, capacité, masse (à densité égale)	k^3

Les trois passages inverses.

$$k = \frac{L'}{L} \quad k = \sqrt{\frac{A'}{A}} \quad k = \sqrt[3]{\frac{V'}{V}}$$

Valeurs à connaître.

k	k^2	k^3
2	4	8
3	9	27
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
1,1	1,21	1,331
$\sqrt{2} \approx 1,414$	2	2,828
$\sqrt[3]{2} \approx 1,26$	1,587	2

Deux erreurs classiques.

- « Je double les dimensions, donc je double le volume » — faux, il est multiplié par 8.
- « Le volume double, donc les longueurs doublent » — faux, elles sont multipliées par $\sqrt[3]{2} \approx 1,26$.

Conséquence pratique : le rapport surface/volume. Il est multiplié par $\frac{k^2}{k^3} = \frac{1}{k}$.

Un objet agrandi a donc **relativement moins** de surface — ce qui explique pourquoi un gros animal se refroidit plus lentement qu'un petit.

Attention aux réductions partielles. Si l'on ne multiplie qu'une dimension par k , le volume est multiplié par k seulement : ce n'est plus un agrandissement, mais un étirement.

Correction de l'exercice 1 - Doubler les dimensions d'un pavé

- **Volume initial** : $4 \times 6 \times 10 = 240 \text{ cm}^3$ ✓
- **Aire totale initiale** : $2(24 + 40 + 60) = 2 \times 124 = 248 \text{ cm}^2$ ✓
- **Contrôles** : $4 \times 6 = 24$, $4 \times 10 = 40$ et $6 \times 10 = 60$ ✓

— **Nouvelles dimensions** : 8, 12 et 20 cm ✓

— **Nouveau volume** :

$$8 \times 12 \times 20 = 1920 \text{ cm}^3$$

— **Rapport des volumes** : $\frac{1920}{240} = 8$ ✓

— **Cohérence** : $2^3 = 8$ ✓

— **Nouvelle aire totale** : $2(96 + 160 + 240) = 2 \times 496 = 992 \text{ cm}^2$ ✓

— **Rapport des aires** : $\frac{992}{248} = 4$ ✓

— **Cohérence** : $2^2 = 4$ ✓

— **Diagonale initiale** : $\sqrt{16 + 36 + 100} = \sqrt{152} \approx 12,329 \text{ cm}$ ✓

— **Nouvelle diagonale** : $\sqrt{64 + 144 + 400} = \sqrt{608} \approx 24,658 \text{ cm}$ ✓

— **Rapport** : 2 ✓

— **Rapport surface sur volume initial** : $\frac{248}{240} \approx 1,033 \text{ cm}^{-1}$ ✓

— **Après agrandissement** : $\frac{992}{1920} \approx 0,517 \text{ cm}^{-1}$ ✓

— **Rapport de ces rapports** : $\frac{1}{2}$, conforme à la règle ✓

Réponse. Volume $\times 8$ (1920 cm^3) et aire $\times 4$ (992 cm^2).

Correction de l'exercice 2 - Remonter du volume au rapport

— **Rapport des volumes** : $\frac{1458}{54} = 27$ ✓

— **Relation** : $k^3 = 27$ ✓

— **Rapport des longueurs** :

$$k = \sqrt[3]{27} = 3$$

— **Rapport des aires** : $k^2 = 9$ ✓

— **Contrôle** : si le petit a une aire de 60 cm^2 , le grand en a 540 cm^2 ✓

— **Vérification par une hypothèse de forme** : si le petit est un cube, son arête vaut $\sqrt[3]{54} \approx 3,780 \text{ cm}$ ✓

— **Arête du grand** : $\sqrt[3]{1458} \approx 11,339 \text{ cm}$ ✓

— **Contrôle du rapport** : $\frac{11,339}{3,780} = 3$ ✓

— **Indépendance de la forme** : le rapport $k = 3$ ne dépend pas de la forme des solides ✓

— **Justification** : seule la **similitude** compte ✓

— **Contrôle de l'aire d'un cube** : $6 \times 3,780^2 \approx 85,72 \text{ cm}^2$ ✓

— **Pour le grand** : $6 \times 11,339^2 \approx 771,48 \text{ cm}^2$ ✓

— **Rapport** : $\frac{771,48}{85,72} \approx 9,0$ ✓

— **Différence des volumes** : $1458 - 54 = 1404 \text{ cm}^3$ ✓

— **Interprétation** : le grand contient 27 fois le petit, soit 26 petits de plus ✓

— **Contrôle** : $26 \times 54 = 1404 \text{ cm}^3$ ✓

Réponse. $k = \sqrt[3]{27} = 3$, et le rapport des aires vaut 9.

Correction de l'exercice 3 - Une maquette

— **Rapport** : $k = \frac{1}{40} = 0,025$ ✓

— **Longueur de la maquette** : $\frac{32}{40} = 0,8$ m, soit 80 cm ✓

— **Rapport des aires** : $k^2 = \frac{1}{1600}$ ✓

— **Surface de la maquette** :

$$\frac{480}{1600} = 0,3 \text{ m}^2 = 3000 \text{ cm}^2$$

— **Rapport des volumes** : $k^3 = \frac{1}{64\,000}$ ✓

— **Volume de la maquette** :

$$\frac{600}{64\,000} = 0,009375 \text{ m}^3$$

— **Conversion** : 9375 cm³, soit environ 9,4 L ✓

— **Contrôle** : 1 m³ = 1 000 000 cm³, donc $0,009375 \times 10^6 = 9375 \text{ cm}^3$ ✓

— **Contrôle de la surface** : $0,3 \text{ m}^2 = 0,3 \times 10\,000 = 3000 \text{ cm}^2$ ✓

— **Masse si le bateau pèse 500 tonnes** : à matériaux identiques, $\frac{500}{64\,000} \approx 0,0078$ tonne ✓

— **Conversion** : environ 7,8 kg ✓

— **Réalité de la maquette** : elle est bien plus légère, les matériaux étant différents ✓

— **Observation frappante** : diviser les longueurs par 40 divise le volume par 64 000 ✓

— **Erreur classique** : croire que la maquette pèse $\frac{500}{40} = 12,5$ tonnes ✓

— **Ordre de grandeur de l'écart** : un facteur 1600 ✓

— **Rapport surface/volume de la maquette** : il est 40 fois plus grand que celui du bateau ✓

Réponse. 80 cm de long, 0,3 m² de coque et 9375 cm³ de volume.

Correction de l'exercice 4 - Doubler le volume d'un cube

— **Volume initial** : 1000 cm³ ✓

— **Volume cherché** : 2000 cm³ ✓

— **Arête** : $a = \sqrt[3]{2000}$ ✓

— **Calcul** :

$$a = 10\sqrt[3]{2} \approx 12,599 \text{ cm}$$

— **Contrôle** : $12,599^3 \approx 2000,0 \text{ cm}^3$ ✓

— **Rapport des arêtes** : $\sqrt[3]{2} \approx 1,26$ ✓

— **Lecture** : il suffit d'augmenter l'arête de 26 % pour doubler le volume ✓

— **Erreur à éviter** : doubler l'arête, ce qui multiplierait le volume par 8 ✓

— **Contrôle** : $20^3 = 8000 \text{ cm}^3$ ✓

— **Volume triple** : 3000 cm³ ✓

— **Arête** :

$$a = 10\sqrt[3]{3} \approx 14,422 \text{ cm}$$

— **Contrôle** : $14,422^3 \approx 3000,0 \text{ cm}^3$ ✓

— **Aire du cube initial** : 600 cm² ✓

- **Aire du cube doublé** : $6 \times 12,599^2 \approx 952,44 \text{ cm}^2$ ✓
- **Rapport des aires** : $(\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{4} \approx 1,587$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{952,44}{600} \approx 1,587$ ✓
- **Le célèbre problème de Délos** : doubler le cube à la règle et au compas est impossible, $\sqrt[3]{2}$ n'étant pas constructible ✓

Réponse. $10\sqrt[3]{2} \approx 12,60 \text{ cm}$ pour le double, et $10\sqrt[3]{3} \approx 14,42 \text{ cm}$ pour le triple.

Correction de l'exercice 5 - Réduction d'un cône

- **Nouveau rayon** : $12 \times 0,75 = 9 \text{ cm}$ ✓
- **Nouvelle hauteur** : $20 \times 0,75 = 15 \text{ cm}$ ✓
- **Aire de base initiale** : $\pi \times 144 \approx 452,39 \text{ cm}^2$ ✓
- **Nouvelle aire de base** : $\pi \times 81 \approx 254,47 \text{ cm}^2$ ✓
- **Rapport des aires** : $0,75^2 = 0,5625$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{254,47}{452,39} = 0,5625$ ✓
- **Volume initial** : $\frac{\pi \times 144 \times 20}{3} = 960\pi \approx 3015,93 \text{ cm}^3$ ✓
- **Nouveau volume** :

$$\frac{\pi \times 81 \times 15}{3} = 405\pi \approx 1272,35 \text{ cm}^3$$
- **Rapport des volumes** : $0,75^3 = 0,421875$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{405}{960} = 0,421875$ ✓
- **Génératrice initiale** : $\sqrt{144 + 400} = \sqrt{544} \approx 23,324 \text{ cm}$ ✓
- **Nouvelle génératrice** : $\sqrt{81 + 225} = \sqrt{306} \approx 17,493 \text{ cm}$ ✓
- **Rapport** : $0,75$ ✓
- **Aire latérale initiale** : $\pi \times 12 \times 23,324 \approx 879,29 \text{ cm}^2$ ✓
- **Nouvelle aire latérale** : $\pi \times 9 \times 17,493 \approx 494,60 \text{ cm}^2$ ✓
- **Rapport** : $0,5625$ ✓
- **Perte de volume** : $960\pi - 405\pi = 555\pi \approx 1743,58 \text{ cm}^3$, soit 57,8 % ✓

Réponse. Rayon 9 cm, hauteur 15 cm, aire de base $81\pi \approx 254,47 \text{ cm}^2$, volume $405\pi \approx 1272,35 \text{ cm}^3$.

Correction de l'exercice 6 - Emballage et matière

- **Volume initial** : $12^3 = 1728 \text{ cm}^3$ ✓
- **Volume cible** : 3456 cm^3 ✓
- **Rapport des volumes** : 2 ✓
- **Rapport des longueurs** : $k = \sqrt[3]{2} \approx 1,2599$ ✓
- **Nouvelle arête** : $12 \times 1,2599 \approx 15,119 \text{ cm}$ ✓
- **Contrôle** : $15,119^3 \approx 3456,0 \text{ cm}^3$ ✓
- **Rapport des surfaces** : $k^2 = \sqrt[3]{4} \approx 1,5874$ ✓
- **Augmentation de surface** :

$$1,5874 - 1 = 0,5874, \text{ soit environ } 58,7 \%$$
- **Surface initiale** : $6 \times 144 = 864 \text{ cm}^2$ ✓
- **Nouvelle surface** : $6 \times 15,119^2 \approx 1371,5 \text{ cm}^2$ ✓

- **Contrôle** : $\frac{1371,5}{864} \approx 1,587 \checkmark$
- **Lecture économique** : doubler la contenance ne coûte que 58,7 % de carton en plus $\checkmark$
- **Conséquence** : le coût d'emballage **par litre** diminue $\checkmark$
- **Carton par litre initial** : $\frac{864}{1,728} = 500 \text{ cm}^2/\text{L} \checkmark$
- **Après agrandissement** : $\frac{1371,5}{3,456} \approx 396,8 \text{ cm}^2/\text{L} \checkmark$
- **Économie relative** : $\frac{500 - 396,8}{500} \approx 20,6 \% \checkmark$
- **Cohérence** : $1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 1 - 0,794 = 0,206 \checkmark$
- **Généralisation** : c'est pourquoi les grands formats sont toujours moins chers au litre $\checkmark$

Réponse. La surface augmente de $\sqrt[3]{4} - 1 \approx 58,7 \%$ (de 864 à $\approx 1371,5 \text{ cm}^2$).

Correction de l'exercice 7 - Étirement d'une seule dimension

- **Volume initial** : $5 \times 5 \times 8 = 200 \text{ cm}^3 \checkmark$
- **Étirement de la hauteur** : nouvelles dimensions $5 \times 5 \times 16 \text{ cm} \checkmark$
- **Nouveau volume** : $400 \text{ cm}^3 \checkmark$
- **Rapport** : 2 $\checkmark$
- **Agrandissement de rapport 2** : dimensions $10 \times 10 \times 16 \text{ cm} \checkmark$
- **Volume** :
$$1600 \text{ cm}^3$$
- **Rapport** : 8 $\checkmark$
- **Comparaison** : 400 contre $1600 \text{ cm}^3 \checkmark$
- **Facteur entre les deux** : 4 $\checkmark$
- **Conclusion essentielle** : l'étirement d'une dimension **n'est pas** un agrandissement $\checkmark$
- **Aire initiale** : $2 \times 25 + 4 \times 40 = 50 + 160 = 210 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Aire après étirement** : $2 \times 25 + 4 \times 80 = 50 + 320 = 370 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Rapport** : $\approx 1,762$, différent de 2 et de 4 $\checkmark$
- **Explication** : seules les faces latérales sont agrandies, les bases restent identiques $\checkmark$
- **Aire après agrandissement** : $210 \times 4 = 840 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Contrôle** : $2 \times 100 + 4 \times 160 = 200 + 640 = 840 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Forme conservée ?** L'étirement change les **proportions** : de 5:5:8 à 5:5:16 $\checkmark$
- **Alors que l'agrandissement** garde les proportions 5:5:8 $\checkmark$

Réponse. Étirement : volume $\times 2$ (400 cm^3) · agrandissement de rapport 2 : volume $\times 8$ (1600 cm^3).

Correction de l'exercice 8 - Deux boules

- **Rapport des rayons** : $k = \frac{9}{6} = 1,5 \checkmark$
- **Rapport des aires** : $k^2 = 2,25 \checkmark$
- **Rapport des volumes** : $k^3 = 3,375 \checkmark$
- **Volume de la petite** : $\frac{4\pi \times 216}{3} = 288\pi \approx 904,78 \text{ cm}^3 \checkmark$

- **Volume de la grande** : $\frac{4\pi \times 729}{3} = 972\pi \approx 3053,63 \text{ cm}^3 \checkmark$
 - **Contrôle du rapport** : $\frac{972}{288} = 3,375 \checkmark$
 - **Nombre de petites boules équivalentes** :
3,375
 - **Interprétation** : il faut 3,375 petites boules pour égaler le volume de la grande $\checkmark$
 - **Aire de la petite** : $4\pi \times 36 = 144\pi \approx 452,39 \text{ cm}^2 \checkmark$
 - **Aire de la grande** : $4\pi \times 81 = 324\pi \approx 1017,88 \text{ cm}^2 \checkmark$
 - **Contrôle du rapport** : $\frac{324}{144} = 2,25 \checkmark$
 - **Rapport surface/volume de la petite** : $\frac{144}{288} = 0,5 \text{ cm}^{-1} \checkmark$
 - **Pour la grande** : $\frac{324}{972} \approx 0,333 \text{ cm}^{-1} \checkmark$
 - **Rapport** : $\frac{1}{1,5} \approx 0,667 \checkmark$
 - **Formule générale** : pour une boule, $\frac{4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{R} \checkmark$
 - **Contrôles** : $\frac{3}{6} = 0,5 \checkmark$ et $\frac{3}{9} \approx 0,333 \checkmark$
 - **Conséquence physique** : la petite boule refroidit **plus vite**, ayant plus de surface par unité de volume $\checkmark$
- Réponse.** Volumes dans le rapport 3,375, aires dans le rapport 2,25 ; il faut 3,375 petites boules.

Correction de l'exercice 9 - Échelle d'une carte

- **Rapport des longueurs** : $\frac{1}{25\,000} \checkmark$
- **Rapport des aires** : $\frac{1}{25\,000^2} = \frac{1}{625\,000\,000} \checkmark$
- **Surface réelle en cm²** : $12 \times 625\,000\,000 = 7,5 \times 10^9 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Conversion en m²** : $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Calcul** : $\frac{7,5 \times 10^9}{10^4} = 750\,000 \text{ m}^2 \checkmark$
- **Conversion en hectares** : $1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2 \checkmark$
- **Surface réelle** :
$$\frac{750\,000}{10\,000} = 75 \text{ ha}$$
- **Contrôle en km²** : $0,75 \text{ km}^2 \checkmark$
- **Contrôle de vraisemblance** : une forêt de 75 ha fait environ 866 m de côté si elle était carrée $\checkmark$
- **Calcul de contrôle** : $\sqrt{750\,000} \approx 866,03 \text{ m} \checkmark$
- **Sur la carte** : ce côté mesurerait $\frac{866,03}{250} \approx 3,46 \text{ cm} \checkmark$
- **Contrôle** : $3,46^2 \approx 11,97 \text{ cm}^2$, soit bien $12 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Astuce de conversion d'échelle** : 1 cm sur la carte représente 250 m $\checkmark$
- **Donc** : 1 cm^2 représente $250^2 = 62\,500 \text{ m}^2$, soit $6,25 \text{ ha} \checkmark$
- **Contrôle** : $12 \times 6,25 = 75 \text{ ha} \checkmark$
- **Erreur classique** : multiplier la surface par 25 000 au lieu de son carré $\checkmark$

— **Résultat erroné** : $300\,000\text{ cm}^2 = 30\text{ m}^2$, absurde pour une forêt ✓

Réponse. 75 hectares (car 1 cm^2 sur la carte représente $6,25\text{ ha}$).

Correction de l'exercice 10 - Masse et volume

— **Rapport des hauteurs** : $k = \frac{45}{15} = 3$ ✓

— **La masse est proportionnelle au volume** (même matériau) ✓

— **Rapport des volumes** : $k^3 = 27$ ✓

— **Masse de la copie** :

$$2,4 \times 27 = 64,8\text{ kg}$$

— **Contrôle de vraisemblance** : une statue de 45 cm en bronze massif est effectivement très lourde ✓

— **Erreur classique** : $2,4 \times 3 = 7,2\text{ kg}$ ✓

— **Facteur d'erreur** : 9 ✓

— **Volume de la petite** : la masse volumique du bronze est d'environ $8,8\text{ kg/dm}^3$ ✓

— **Calcul** : $\frac{2,4}{8,8} \approx 0,273\text{ dm}^3$, soit 273 cm^3 ✓

— **Volume de la copie** : $273 \times 27 \approx 7371\text{ cm}^3$, soit environ $7,4\text{ L}$ ✓

— **Contrôle** : $7,371 \times 8,8 \approx 64,9\text{ kg}$ ✓

— **Si la copie était creuse** : sa masse dépendrait de l'épaisseur, non du volume total ✓

— **Approximation pour une copie creuse** : la masse suivrait plutôt la **surface**, donc $k^2 = 9$ ✓

— **Masse estimée dans ce cas** : $2,4 \times 9 = 21,6\text{ kg}$ ✓

— **Écart entre les deux hypothèses** : un facteur 3 ✓

— **Conclusion pratique** : les grandes sculptures sont presque toujours **creuses**, pour cette raison même ✓

Réponse. $2,4 \times 27 = 64,8\text{ kg}$ (si elle est massive).

Correction de l'exercice 11 - Comparer deux pizzas

— **Rayon de la petite** : 13 cm ✓

— **Aire** : $\pi \times 169 \approx 530,93\text{ cm}^2$ ✓

— **Rayon de la grande** : 20 cm ✓

— **Aire** : $\pi \times 400 \approx 1256,64\text{ cm}^2$ ✓

— **Rapport des diamètres** : $\frac{40}{26} \approx 1,538$ ✓

— **Rapport des aires** : $1,538^2 \approx 2,367$ ✓

— **Contrôle** : $\frac{400}{169} \approx 2,367$ ✓

— **Prix au cm^2 de la petite** : $\frac{9}{530,93} \approx 0,01695\text{ €/cm}^2$ ✓

— **Prix au cm^2 de la grande** : $\frac{20}{1256,64} \approx 0,01592\text{ €/cm}^2$ ✓

— **Conclusion** : la **grande** est plus avantageuse ✓

— **Économie relative** : $\frac{0,01695 - 0,01592}{0,01695} \approx 6,1\%$ ✓

— **Autre lecture** : la grande offre 2,367 fois la surface pour 2,22 fois le prix ✓

— **Contrôle** : $\frac{20}{9} \approx 2,222$ ✓

— **Comparaison des rapports** : $2,367 > 2,222$ ✓

- **Prix « juste » de la grande** : $9 \times 2,367 \approx 21,30 \text{ €}$ ✓
- **Économie absolue** : $21,30 - 20 = 1,30 \text{ €}$ ✓
- **Piège d'intuition** : la grande semble « seulement » 1,5 fois plus large, mais elle porte 2,4 fois plus de garniture ✓

Réponse. La grande : $0,0159 \text{ €/cm}^2$ contre $0,0170 \text{ €/cm}^2$, soit 6,1 % d'économie.

Correction de l'exercice 12 - Réduire pour tenir dans un carton

- **Arête de l'objet** : $\sqrt[3]{8000} = 20 \text{ cm}$ ✓
- **Capacité du carton en cm^3** : $3,375 \text{ L} = 3375 \text{ cm}^3$ ✓
- **Arête du carton** : $\sqrt[3]{3375} = 15 \text{ cm}$ ✓
- **Constat** : $20 > 15$, l'objet ne tient donc pas ✓
- **Rapport nécessaire** :

$$k = \frac{15}{20} = 0,75$$

- **Baisse des dimensions** : $1 - 0,75 = 25 \%$ ✓
- **Rapport des volumes** : $k^3 = 0,421875$ ✓
- **Nouveau volume** : $8000 \times 0,421875 = 3375 \text{ cm}^3$ ✓
- **Contrôle** : c'est exactement la capacité du carton ✓
- **Baisse du volume** :

$$1 - 0,421875 \approx 57,8 \%$$

- **Leçon** : réduire les longueurs de 25 % fait perdre près de 58 % du volume ✓
- **Rapport des aires** : $k^2 = 0,5625$ ✓
- **Aire initiale** : $6 \times 400 = 2400 \text{ cm}^2$ ✓
- **Nouvelle aire** : $6 \times 225 = 1350 \text{ cm}^2$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{1350}{2400} = 0,5625$ ✓
- **Question inverse** : pour ne perdre que la moitié du volume, quel rapport ? ✓
- **Calcul** : $k = \sqrt[3]{0,5} \approx 0,7937$, soit une baisse de 20,6 % seulement ✓
- **Arête correspondante** : $20 \times 0,7937 \approx 15,87 \text{ cm}$, qui ne tiendrait **pas** dans le carton ✓

Réponse. $k = \frac{15}{20} = 0,75$: les dimensions baissent de 25 % et le volume de 57,8 %.

Correction de l'exercice 13 - Surface et volume d'un animal

- **Rapport des longueurs** : $k = \frac{200}{20} = 10$ ✓
- **Rapport des surfaces** : $k^2 = 100$ ✓
- **Rapport des volumes** : $k^3 = 1000$ ✓
- **Rapport surface/volume** : il est multiplié par $\frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$ ✓
- **Conclusion** :

le gros animal a un rapport 10 fois plus petit

- **Perte de chaleur** : elle est proportionnelle à la **surface** ✓
- **Chaleur à produire** : proportionnelle au **volume** (la masse) ✓
- **Donc** : le petit animal perd relativement 10 fois plus de chaleur ✓
- **Conséquence physiologique** : il doit manger beaucoup plus, proportionnellement à sa masse ✓

- **Exemple réel** : une musaraigne mange chaque jour l'équivalent de son poids ✓
- **Contre-exemple** : un éléphant mange environ 4 % de son poids par jour ✓
- **Conséquence géographique** : les espèces des régions froides sont en moyenne plus grosses ✓
- **Nom de cette observation** : la règle de Bergmann ✓
- **Autre conséquence** : les animaux des régions chaudes ont de grandes oreilles ou des appendices, pour **augmenter** leur surface ✓
- **Exemple** : le fennec du désert contre le renard polaire ✓
- **Illustration numérique** : pour des sphères de 1 cm et 10 cm de rayon, les rapports valent 3 et $0,3 \text{ cm}^{-1}$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{3}{R}$ donne 3 pour $R = 1$ et $0,3$ pour $R = 10$ ✓
- **Limite du raisonnement** : un animal n'est pas une sphère, mais le rapport $\frac{1}{k}$ reste valable pour des formes semblables ✓

Réponse. Le rapport surface/volume du gros est 10 fois plus petit : le petit animal perd relativement 10 fois plus de chaleur.

Correction de l'exercice 14 - Agrandir un aquarium

- **Rapport des volumes** : $\frac{150}{60} = 2,5$ ✓
- **Rapport des longueurs** : $k = \sqrt[3]{2,5}$ ✓
- **Calcul** : $k \approx 1,3572$ ✓
- **Augmentation des dimensions** :
 $1,3572 - 1 \approx 35,7\%$
- **Contrôle** : $1,3572^3 \approx 2,500$ ✓
- **Rapport des surfaces** : $k^2 \approx 1,8420$ ✓
- **Augmentation de la surface de verre** :
 $\approx 84,2\%$
- **Contrôle** : $2,5^{2/3} \approx 1,842$ ✓
- **Si l'aquarium initial mesure $50 \times 30 \times 40 \text{ cm}$** : son volume vaut $60\,000 \text{ cm}^3$, soit 60 L ✓
- **Nouvelles dimensions** : $\approx 67,9 \times 40,7 \times 54,3 \text{ cm}$ ✓
- **Contrôle du volume** : $67,9 \times 40,7 \times 54,3 \approx 150\,058 \text{ cm}^3$ ✓
- **Surface de verre initiale** (sans couvercle) : le fond et quatre parois ✓
- **Calcul** : $50 \times 30 + 2 \times (50 \times 40) + 2 \times (30 \times 40) = 1500 + 4000 + 2400 = 7900 \text{ cm}^2$ ✓
- **Nouvelle surface** : $7900 \times 1,842 \approx 14\,552 \text{ cm}^2$ ✓
- **Contrôle direct** :
 $67,9 \times 40,7 + 2 \times 67,9 \times 54,3 + 2 \times 40,7 \times 54,3 \approx 2764 + 7374 + 4420 = 14\,558 \text{ cm}^2$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent aux arrondis près ✓
- **Coût du verre à 35 €/m^2** : $1,4558 \times 35 \approx 50,95 \text{ €}$ ✓

Réponse. Dimensions +35,7 % et surface de verre +84,2 %.

Correction de l'exercice 15 - Trois solides semblables

- **Rapport du deuxième au premier** : $k_2 = \frac{6}{4} = 1,5$ ✓
- **Rapport des volumes** : $k_2^3 = 3,375$ ✓
- **Volume du deuxième** :

$$32 \times 3,375 = 108 \text{ cm}^3$$

— **Rapport du troisième au premier** : $k_3 = \frac{10}{4} = 2,5 \checkmark$

— **Rapport des volumes** : $k_3^3 = 15,625 \checkmark$

— **Volume du troisième** :

$$32 \times 15,625 = 500 \text{ cm}^3$$

— **Contrôle du rapport entre le troisième et le deuxième** : $\frac{500}{108} \approx 4,630 \checkmark$

— **Contrôle par les hauteurs** : $\left(\frac{10}{6}\right)^3 = \frac{1000}{216} \approx 4,630 \checkmark$

— **Cohérence** : les deux calculs concordent $\checkmark$

— **Observation** : les volumes 32, 108 et 500 sont proportionnels à 4^3 , 6^3 et $10^3 \checkmark$

— **Contrôles** : $4^3 = 64$, $6^3 = 216$ et $10^3 = 1000 \checkmark$

— **Coefficient de proportionnalité** : $\frac{32}{64} = 0,5 \checkmark$

— **Vérifications** : $0,5 \times 216 = 108 \checkmark$ et $0,5 \times 1000 = 500 \checkmark$

— **Somme des trois volumes** : $32 + 108 + 500 = 640 \text{ cm}^3 \checkmark$

— **Hauteur d'un solide semblable de volume 640 cm^3** : $\sqrt[3]{\frac{640}{0,5}} = \sqrt[3]{1280} \approx 10,858 \text{ cm} \checkmark$

— **Contrôle** : $0,5 \times 10,858^3 \approx 640,0 \text{ cm}^3 \checkmark$

Réponse. 108 cm^3 et 500 cm^3 (les volumes sont proportionnels aux cubes des hauteurs).

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une usine d'emballages

a) **Volume** : $\pi r^2 h = \pi \times 400 \times 50 \checkmark$

— **Calcul** :

$$V = 20\,000\pi \approx 62\,831,85 \text{ cm}^3 \approx 62,83 \text{ L}$$

— **Aire des deux disques** : $2\pi \times 400 = 800\pi \text{ cm}^2 \checkmark$

— **Aire latérale** : $2\pi \times 20 \times 50 = 2000\pi \text{ cm}^2 \checkmark$

— **Aire totale** :

$$A = 2800\pi \approx 8796,46 \text{ cm}^2$$

b) **Rapport des volumes** : $3 \checkmark$

— **Rapport des longueurs** : $k = \sqrt[3]{3} \approx 1,4422 \checkmark$

— **Nouveau rayon** : $20 \times 1,4422 \approx 28,845 \text{ cm} \checkmark$

— **Nouvelle hauteur** : $50 \times 1,4422 \approx 72,112 \text{ cm} \checkmark$

— **Volume** : $3 \times 20\,000\pi = 60\,000\pi \approx 188\,495,56 \text{ cm}^3$, soit $\approx 188,50 \text{ L} \checkmark$

— **Contrôle direct** : $\pi \times 28,845^2 \times 72,112 \approx 188\,499 \text{ cm}^3 \checkmark$

— **Rapport des aires** : $k^2 = \sqrt[3]{9} \approx 2,0801 \checkmark$

— **Nouvelle aire totale** :

$$2800\pi \times 2,0801 \approx 18\,297,5 \text{ cm}^2$$

— **Contrôle** : $\approx 1,83 \text{ m}^2 \checkmark$

c) **Métal par litre du modèle initial** : $\frac{8796,46}{62,83} \approx 139,97 \text{ cm}^2/\text{L} \checkmark$

— **Métal par litre du modèle familial** : $\frac{18\,297,5}{188,50} \approx 97,07 \text{ cm}^2/\text{L} \checkmark$

- **Rapport** : $\frac{97,07}{139,97} \approx 0,6935$ ✓
- **Contrôle théorique** : ce rapport vaut $\frac{1}{k} = \frac{1}{1,4422} \approx 0,6934$ ✓
- **Cohérence** : les deux calculs concordent ✓
- **Économie de métal par litre** : environ 30,7 % ✓
- **Conclusion industrielle** : le grand format est **nettement** plus économe en métal ✓

d) **Condition** : $k^2 = 2$ ✓

- **Rapport des longueurs** :

$$k = \sqrt{2} \approx 1,4142$$

- **Nouveau rayon** : $20\sqrt{2} \approx 28,284$ cm ✓
- **Nouvelle hauteur** : $50\sqrt{2} \approx 70,711$ cm ✓
- **Rapport des volumes** : $k^3 = 2\sqrt{2} \approx 2,8284$ ✓
- **Nouvelle contenance** :

$$62,83 \times 2,8284 \approx 177,72 \text{ L}$$

- **Contrôle** : $20\,000\pi \times 2\sqrt{2} \approx 177\,715 \text{ cm}^3$ ✓
- **Contrôle de l'aire** : $2800\pi \times 2 = 5600\pi \approx 17\,592,92 \text{ cm}^2$ ✓
- **Vérification** : c'est bien le double de $8796,46 \text{ cm}^2$ ✓
- **Comparaison avec la question b)** : doubler l'aire donne 177,72 L, tripler le volume n'exigeait que $\times 2,08$ sur l'aire ✓
- **Lecture** : l'aire croît **moins vite** que le volume, d'où l'intérêt des grands formats ✓
- **Métal par litre dans ce cas** : $\frac{17\,592,92}{177,72} \approx 98,99 \text{ cm}^2/\text{L}$ ✓
- **Cohérence** : $\frac{139,97}{\sqrt{2}} \approx 98,97 \text{ cm}^2/\text{L}$, conforme à la règle $\frac{1}{k}$ ✓

Réponse. a) $20\,000\pi \approx 62,83$ L et $2800\pi \approx 8796,46 \text{ cm}^2$ · b) $k = \sqrt[3]{3}$, rayon $\approx 28,85$ cm, $\approx 188,50$ L, aire $\approx 18\,297 \text{ cm}^2$ · c) ≈ 97 contre $140 \text{ cm}^2/\text{L}$, soit $-30,7\%$ · d) $k = \sqrt{2}$, contenance $\approx 177,72$ L.