

Plaquette 4 – Distances et angles dans les solides

Géométrie dans l'espace — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

La double application de Pythagore. Dans un pavé de dimensions a, b, c :

$$\text{diagonale d'une face} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{grande diagonale} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

La grande diagonale s'obtient en appliquant Pythagore au triangle rectangle formé par la diagonale d'une face et l'arête perpendiculaire.

Longueurs remarquables d'un cube d'arête a .

Longueur	Valeur
arête	a
diagonale d'une face	$a\sqrt{2} \approx 1,414a$
grande diagonale	$a\sqrt{3} \approx 1,732a$
distance du centre à un sommet	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
distance du centre à une face	$\frac{a}{2}$
distance du centre à une arête	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Pyramide régulière à base carrée de côté c et de hauteur h :

Longueur	Valeur
demi-diagonale de la base	$\frac{c\sqrt{2}}{2}$
arête latérale	$\sqrt{h^2 + \frac{c^2}{2}}$
apothème (hauteur d'une face)	$\sqrt{h^2 + \frac{c^2}{4}}$

Cône de rayon r et de hauteur h . La **génératrice** vaut $g = \sqrt{r^2 + h^2}$, et l'aire latérale πrg .

Méthode de travail en trois temps.

1. Identifier le **triangle rectangle** utile, en le décrivant par ses trois sommets. 2. Calculer les deux côtés connus, en **valeur exacte**. 3. Appliquer Pythagore, puis n'arrondir qu'à la **fin**.

Contrôle systématique. Dans un solide, l'hypoténuse d'un triangle rectangle est toujours **plus grande** que chacune des arêtes qu'elle relie — un résultat inférieur signale une erreur.

Correction de l'exercice 1 – Diagonales d'un pavé

— **Face** 6×8 : $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$ ✓

- **Face** 6×24 : $\sqrt{36 + 576} = \sqrt{612} = 6\sqrt{17} \approx 24,739$ cm ✓
- **Face** 8×24 : $\sqrt{64 + 576} = \sqrt{640} = 8\sqrt{10} \approx 25,298$ cm ✓
- **Grande diagonale** : on applique Pythagore avec la diagonale 10 et l'arête 24 ✓
- **Calcul** :

$$D = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26 \text{ cm}$$

- **Contrôle par la formule directe** : $\sqrt{36 + 64 + 576} = \sqrt{676} = 26$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
- **Contrôle par un autre chemin** : avec la diagonale $6\sqrt{17}$ et l'arête 8 ✓
- **Calcul** : $\sqrt{612 + 64} = \sqrt{676} = 26$ cm ✓
- **Troisième chemin** : avec $8\sqrt{10}$ et l'arête 6, soit $\sqrt{640 + 36} = 26$ cm ✓
- **Conclusion** : les trois chemins donnent le même résultat ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : $26 > 24$, la diagonale dépasse la plus grande arête ✓
- **Encadrement** : $24 < 26 < 6 + 8 + 24 = 38$ ✓
- **Triplet remarquable** : 6-8-24-26, avec deux triplets pythagoriciens emboîtés ✓
- **Volume** : $6 \times 8 \times 24 = 1152$ cm³ ✓
- **Aire totale** : $2(48 + 144 + 192) = 2 \times 384 = 768$ cm² ✓

Réponse. Diagonales de faces : 10, $6\sqrt{17} \approx 24,74$ et $8\sqrt{10} \approx 25,30$ cm ; grande diagonale 26 cm.

Correction de l'exercice 2 - Distances dans un cube

- **Diagonale d'une face** : $8\sqrt{2} \approx 11,314$ cm ✓
- **Contrôle** : $\sqrt{64 + 64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ ✓
- **Grande diagonale** : $8\sqrt{3} \approx 13,856$ cm ✓
- **Contrôle** : $\sqrt{128 + 64} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$ ✓
- **Distance du centre à un sommet** : la moitié de la grande diagonale ✓
- **Calcul** :

$$\frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6,928 \text{ cm}$$

- **Justification** : le centre du cube est le milieu de chaque grande diagonale ✓
- **Distance du centre à une face** : $\frac{8}{2} = 4$ cm ✓
- **Distance du centre à une arête** : $\frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \approx 5,657$ cm ✓
- **Classement** : $4 < 5,657 < 6,928$ ✓
- **Interprétation** : le sommet est le point du cube le **plus éloigné** du centre ✓
- **Rayon de la boule inscrite** : 4 cm ✓
- **Rayon de la boule circonscrite** : $4\sqrt{3} \approx 6,928$ cm ✓
- **Rapport** : $\sqrt{3} \approx 1,732$ ✓
- **Volume du cube** : 512 cm³ ✓
- **Volume de la boule circonscrite** : $\frac{4\pi \times 332,554}{3} \approx 1393,0$ cm³ ✓
- **Contrôle** : la boule circonscrite est bien plus volumineuse que le cube ✓

Réponse. $8\sqrt{2} \approx 11,31$ cm, $8\sqrt{3} \approx 13,86$ cm, et $4\sqrt{3} \approx 6,93$ cm du centre à un sommet.

Correction de l'exercice 3 - Arête latérale d'une pyramide

- **Diagonale de la base** : $10\sqrt{2} \approx 14,142$ cm ✓
- **Demi-diagonale** : $5\sqrt{2} \approx 7,071$ cm ✓
- **Triangle rectangle pour l'arête latérale** : hauteur, demi-diagonale, arête ✓
- **Calcul** :

$$a = \sqrt{144 + 50} = \sqrt{194} \approx 13,928 \text{ cm}$$

- **Contrôle** : $(5\sqrt{2})^2 = 50$ ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : $13,928 > 12$, l'arête dépasse la hauteur ✓
- **Triangle rectangle pour l'apothème** : hauteur, demi-côté, apothème ✓
- **Demi-côté** : 5 cm ✓
- **Calcul** :

$$m = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

- **Élégance** : l'apothème est un nombre **entier** ✓
- **Contrôle de l'ordre** : $12 < 13 < 13,928$ ✓
- **Explication** : le milieu d'une arête de base est plus proche du centre que le sommet du carré ✓
- **Aire d'une face latérale** : $\frac{10 \times 13}{2} = 65 \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire latérale totale** : $4 \times 65 = 260 \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire totale** : $260 + 100 = 360 \text{ cm}^2$ ✓
- **Volume** : $\frac{100 \times 12}{3} = 400 \text{ cm}^3$ ✓
- **Contrôle de l'arête latérale par l'apothème** : $\sqrt{169 + 25} = \sqrt{194}$ ✓

Réponse. Arête latérale $\sqrt{194} \approx 13,93$ cm et apothème 13 cm.

Correction de l'exercice 4 - Génératrice d'un cône

- **Génératrice** : $g = \sqrt{r^2 + h^2}$ ✓
- **Calcul** :

$$g = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

- **Triplet pythagoricien** : 9-12-15, soit trois fois 3-4-5 ✓
- **Aire latérale** : $\pi r g$ ✓
- **Calcul** :

$$A_l = \pi \times 9 \times 15 = 135\pi \approx 424,12 \text{ cm}^2$$

- **Aire de base** : $\pi \times 81 = 81\pi \approx 254,47 \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire totale** :

$$135\pi + 81\pi = 216\pi \approx 678,58 \text{ cm}^2$$

- **Volume** : $\frac{\pi \times 81 \times 12}{3} = 324\pi \approx 1017,88 \text{ cm}^3$ ✓
- **Contrôle de l'ordre** : $g = 15 > h = 12$ et $g > r = 9$ ✓
- **Angle au sommet du patron** : la mesure de l'arc vaut $\frac{2\pi r}{g}$ radians ✓
- **Calcul en degrés** : $\frac{r}{g} \times 360 = \frac{9}{15} \times 360 = 216^\circ$ ✓
- **Contrôle** : l'aire du secteur vaut $\frac{216}{360} \times \pi \times 225 = 0,6 \times 225\pi = 135\pi$ ✓

- **Cohérence** : c'est bien l'aire latérale ✓
- **Rapport aire latérale sur aire de base** : $\frac{135}{81} = \frac{5}{3} \approx 1,667$ ✓
- **Contrôle** : ce rapport vaut $\frac{g}{r} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ ✓
- **Hauteur pour que la génératrice double** : $g = 30$ exige
 $h = \sqrt{900 - 81} = \sqrt{819} \approx 28,62$ cm ✓

Réponse. $g = 15$ cm, aire latérale $135\pi \approx 424,12$ cm², aire totale $216\pi \approx 678,58$ cm².

Correction de l'exercice 5 - Angle d'une diagonale de cube

- **Triangle rectangle** : l'arête, la diagonale de la face opposée, et la grande diagonale ✓
- **Côté adjacent à l'angle** : l'arête, de longueur a ✓
- **Hypoténuse** : la grande diagonale, $a\sqrt{3}$ ✓
- **Cosinus** :

$$\cos \theta = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,5774$$
- **Remarque** : le résultat ne dépend **pas** de a ✓
- **Mesure de l'angle** : $\theta \approx 54,74^\circ$ ✓
- **Contrôle** : $\cos 54,74^\circ \approx 0,5774$ ✓
- **Côté opposé** : la diagonale de face, $a\sqrt{2}$ ✓
- **Sinus** : $\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,8165$ ✓
- **Contrôle** : $0,5774^2 + 0,8165^2 \approx 0,3334 + 0,6667 = 1,0001$ ✓
- **Tangente** : $\frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \approx 1,4142$ ✓
- **Contrôle** : $\tan 54,74^\circ \approx 1,4142$ ✓
- **Angle entre la grande diagonale et une face** : son complémentaire, soit $\approx 35,26^\circ$ ✓
- **Contrôle** : $54,74 + 35,26 = 90^\circ$ ✓
- **Angle entre deux grandes diagonales** : environ $70,53^\circ$ ou $109,47^\circ$ ✓
- **Fait de culture** : $109,47^\circ$ est l'angle des liaisons du carbone dans le méthane ✓
- **Contrôle** : $2 \times 54,74 = 109,48^\circ$, aux arrondis près ✓

Réponse. $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$, soit $\theta \approx 54,74^\circ$ — indépendant de l'arête.

Correction de l'exercice 6 - Hauteur d'un tétraèdre régulier

- **Face** : un triangle équilatéral de côté 6 cm ✓
- **Hauteur d'une face** : $\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \approx 5,196$ cm ✓
- **Contrôle** : $\sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ ✓
- **Pied de la hauteur du solide** : le centre de gravité de la base ✓
- **Distance du centre de gravité à un sommet** : les deux tiers de la hauteur d'une face ✓
- **Calcul** : $\frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \approx 3,464$ cm ✓
- **Triangle rectangle** : hauteur du solide, $2\sqrt{3}$, arête 6 ✓
- **Calcul** :

$$h = \sqrt{36 - 12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \approx 4,899 \text{ cm}$$

- **Contrôle de vraisemblance** : $4,899 < 5,196 < 6$ ✓
- **Interprétation** : la hauteur du solide est **inférieure** à celle d'une face ✓
- **Aire d'une face** : $\frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \approx 15,588 \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire totale** : $4 \times 9\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \approx 62,354 \text{ cm}^2$ ✓
- **Volume** :

$$V = \frac{9\sqrt{3} \times 2\sqrt{6}}{3} = 6\sqrt{18} = 18\sqrt{2} \approx 25,456 \text{ cm}^3$$

- **Contrôle par la formule du tétraèdre** : $\frac{a^3}{6\sqrt{2}} = \frac{216}{8,485} \approx 25,456 \text{ cm}^3$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
- **Comparaison au cube d'arête 6** : 216 cm^3 ✓
- **Rapport** : $\frac{25,456}{216} \approx 11,8\%$ ✓

Réponse. Hauteur d'une face $3\sqrt{3} \approx 5,20 \text{ cm}$, hauteur du solide $2\sqrt{6} \approx 4,90 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 7 - Chemin le plus court sur un pavé

- **Méthode** : déplier les faces pour obtenir un chemin **rectiligne** ✓
 - **Premier dépliage** : le sol et un mur de longueur 6 m ✓
 - **Dimensions du rectangle déplié** : $6 + 3 = 9 \text{ m}$ par 4 m ✓
 - **Longueur** : $\sqrt{81 + 16} = \sqrt{97} \approx 9,849 \text{ m}$ ✓
 - **Deuxième dépliage** : le sol et un mur de longueur 4 m ✓
 - **Dimensions** : $4 + 3 = 7 \text{ m}$ par 6 m ✓
 - **Longueur** : $\sqrt{49 + 36} = \sqrt{85} \approx 9,220 \text{ m}$ ✓
 - **Troisième dépliage** : deux murs adjacents ✓
 - **Dimensions** : $6 + 4 = 10 \text{ m}$ par 3 m ✓
 - **Longueur** : $\sqrt{100 + 9} = \sqrt{109} \approx 10,440 \text{ m}$ ✓
 - **Comparaison des trois** : $9,220 < 9,849 < 10,440$ ✓
 - **Chemin le plus court** :
- $$\sqrt{85} \approx 9,22 \text{ m}$$
- **Comparaison avec la grande diagonale** : $\sqrt{36 + 16 + 9} = \sqrt{61} \approx 7,810 \text{ m}$ ✓
 - **Lecture** : en volant, l'araignée ferait 7,81 m, soit 1,41 m de moins ✓
 - **Règle pratique** : on déplie en regroupant les **deux plus petites** dimensions ✓
 - **Contrôle** : ici $4 + 3 = 7$ est le plus petit des trois regroupements possibles face à la dimension restante ✓
 - **Raison mathématique** : $\sqrt{(a+b)^2 + c^2}$ est minimal quand $a + b$ est le plus petit et c le plus grand ✓

Réponse. $\sqrt{85} \approx 9,22 \text{ m}$, en dépliant le sol avec le mur de 4 m.

Correction de l'exercice 8 - Boule dans un cylindre

- **Rayon de la boule** : 7 cm, le même que celui du cylindre ✓
- **Hauteur du cylindre** : le diamètre de la boule, soit 14 cm ✓
- **Volume du cylindre** : $\pi \times 49 \times 14 = 686\pi \approx 2155,13 \text{ cm}^3$ ✓
- **Volume de la boule** : $\frac{4\pi \times 343}{3} = \frac{1372\pi}{3} \approx 1436,76 \text{ cm}^3$ ✓
- **Rapport des volumes** :

$$\frac{1372/3}{686} = \frac{2}{3} \approx 0,667$$

- **Résultat d'Archimède** : la boule occupe exactement les **deux tiers** du cylindre ✓
- **Aire de la boule** : $4\pi \times 49 = 196\pi \approx 615,75 \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire latérale du cylindre** : $2\pi \times 7 \times 14 = 196\pi \text{ cm}^2$ ✓
- **Égalité remarquable** : les deux valent 196π ✓
- **Second résultat d'Archimède** : l'aire de la boule égale l'aire latérale du cylindre circonscrit ✓
- **Aire totale du cylindre** : $196\pi + 2 \times 49\pi = 294\pi \approx 923,63 \text{ cm}^2$ ✓
- **Rapport des aires totales** : $\frac{196}{294} = \frac{2}{3}$ ✓
- **Coïncidence frappante** : le **même** rapport $\frac{2}{3}$ que pour les volumes ✓
- **Volume perdu** : $686\pi - \frac{1372\pi}{3} = \frac{686\pi}{3} \approx 718,38 \text{ cm}^3$ ✓
- **Contrôle** : c'est bien le tiers du cylindre ✓
- **Fait historique** : Archimède avait demandé qu'on gravât cette figure sur sa tombe ✓
- **Contrôle général** : pour un rayon R , le rapport $\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3} = \frac{2}{3}$ ne dépend pas de R ✓

Réponse. La boule occupe les $\frac{2}{3}$ du volume du cylindre, et son aire égale l'aire latérale du cylindre ($196\pi \text{ cm}^2$).

Correction de l'exercice 9 - Distance entre deux arêtes

- **Longueur AG** : c'est une grande diagonale ✓
- **Calcul** : $10\sqrt{3} \approx 17,321 \text{ cm}$ ✓
- **Longueur BH** : c'est également une grande diagonale ✓
- **Calcul** : $10\sqrt{3} \approx 17,321 \text{ cm}$ ✓
- **Égalité** : les quatre grandes diagonales du cube ont la même longueur ✓
- **Point de rencontre** : le **centre** du cube ✓
- **Justification** : chaque grande diagonale a pour milieu le centre du cube ✓
- **Conséquence** : AG et BH se coupent en ce centre ✓
- **Coplanarité** : elles sont donc coplanaires ✓
- **Plan les contenant** : le plan (ABGH), rectangle diagonal du cube ✓
- **Dimensions de ce rectangle** : 10 cm par $10\sqrt{2} \approx 14,142 \text{ cm}$ ✓
- **Contrôle de sa diagonale** : $\sqrt{100 + 200} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ ✓
- **Cohérence** : c'est bien la grande diagonale du cube ✓
- **Angle entre AG et BH** : les diagonales d'un rectangle non carré ne sont pas perpendiculaires ✓
- **Calcul de cet angle** : $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{10\sqrt{2}/2}{10/2} = \sqrt{2}$ ✓
- **Donc** : $\frac{\theta}{2} \approx 54,74^\circ$ et $\theta \approx 109,47^\circ$ ✓
- **Contrôle** : l'angle aigu associé vaut $\approx 70,53^\circ$ ✓

Réponse. $AG = BH = 10\sqrt{3} \approx 17,32 \text{ cm}$; elles se coupent au centre du cube, dans le plan (ABGH).

Correction de l'exercice 10 - Apothème et aire latérale

- **Demi-diagonale de la base** : $\frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2} \approx 11,314 \text{ cm} \checkmark$
- **Triangle rectangle** : hauteur, demi-diagonale, arête latérale $\checkmark$
- **Calcul de la hauteur** :

$$h = \sqrt{289 - 128} = \sqrt{161} \approx 12,689 \text{ cm}$$

- **Contrôle** : $(8\sqrt{2})^2 = 128 \checkmark$
- **Contrôle de vraisemblance** : $12,689 < 17 \checkmark$
- **Apothème** : on utilise la hauteur et le demi-côté $\checkmark$
- **Demi-côté** : $8 \text{ cm} \checkmark$
- **Calcul** :

$$m = \sqrt{161 + 64} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

- **Élégance** : l'apothème est un entier $\checkmark$
- **Contrôle par l'arête latérale** : $\sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17 \text{ cm} \checkmark$
- **Cohérence** : on retrouve bien l'arête latérale $\checkmark$
- **Aire d'une face** : $\frac{16 \times 15}{2} = 120 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Aire latérale** :

$$4 \times 120 = 480 \text{ cm}^2$$

- **Aire de base** : $256 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Aire totale** : $736 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Volume** : $\frac{256 \times \sqrt{161}}{3} \approx \frac{256 \times 12,689}{3} \approx 1082,8 \text{ cm}^3 \checkmark$
- **Ordre des trois longueurs** : $h \approx 12,69 < m = 15 < a = 17 \checkmark$

Réponse. Hauteur $\sqrt{161} \approx 12,69 \text{ cm}$, apothème 15 cm , aire latérale 480 cm^2 .

Correction de l'exercice 11 - Sphère et cube inscrit

- **Relation clé** : la grande diagonale du cube est le **diamètre** de la sphère $\checkmark$
- **Diamètre** : $18 \text{ cm} \checkmark$
- **Équation** : $a\sqrt{3} = 18 \checkmark$
- **Arête** :

$$a = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3} \approx 10,392 \text{ cm}$$

- **Contrôle** : $6\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 18 \checkmark$
- **Volume du cube** : $(6\sqrt{3})^3 = 216 \times 3\sqrt{3} = 648\sqrt{3} \approx 1122,37 \text{ cm}^3 \checkmark$
- **Volume de la sphère** : $\frac{4\pi \times 729}{3} = 972\pi \approx 3053,63 \text{ cm}^3 \checkmark$
- **Proportion** :

$$\frac{1122,37}{3053,63} \approx 36,76 \%$$

- **Valeur exacte** : $\frac{648\sqrt{3}}{972\pi} = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi} \approx 0,3676 \checkmark$
- **Contrôle** : $\frac{648}{972} = \frac{2}{3} \checkmark$

- **Comparaison avec la boule inscrite dans un cube** : la proportion y était de $\frac{\pi}{6} \approx 52,36\%$ ✓
- **Observation** : le cube inscrit dans la sphère « remplit » beaucoup moins bien ✓
- **Aire du cube** : $6 \times 108 = 648 \text{ cm}^2$ ✓
- **Contrôle** : $(6\sqrt{3})^2 = 108$ ✓
- **Aire de la sphère** : $4\pi \times 81 = 324\pi \approx 1017,88 \text{ cm}^2$ ✓
- **Proportion des aires** : $\frac{648}{1017,88} \approx 63,66\%$ ✓
- **Valeur exacte** : $\frac{648}{324\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0,6366$ ✓

Réponse. Arête $6\sqrt{3} \approx 10,39 \text{ cm}$, volume $648\sqrt{3} \approx 1122,37 \text{ cm}^3$, soit $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi} \approx 36,76\%$ de la sphère.

Correction de l'exercice 12 - Angle d'ouverture d'un cône

- **Hauteur** : $h = \sqrt{g^2 - r^2}$ ✓
- **Calcul** :

$$h = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16 \text{ cm}$$

- **Triplet pythagoricien** : 12-16-20, soit quatre fois 3-4-5 ✓
- **Angle entre la génératrice et l'axe** : $\sin \alpha = \frac{r}{g}$ ✓
- **Calcul** : $\sin \alpha = \frac{12}{20} = 0,6$ ✓
- **Mesure** : $\alpha \approx 36,87^\circ$ ✓
- **Contrôle** : $\cos \alpha = \frac{16}{20} = 0,8$, et $0,6^2 + 0,8^2 = 1$ ✓
- **Angle d'ouverture total** : $2\alpha \approx 73,74^\circ$ ✓
- **Aire latérale** :

$$A_l = \pi \times 12 \times 20 = 240\pi \approx 753,98 \text{ cm}^2$$

- **Aire de base** : $144\pi \approx 452,39 \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire totale** : $384\pi \approx 1206,37 \text{ cm}^2$ ✓
- **Volume** : $\frac{\pi \times 144 \times 16}{3} = 768\pi \approx 2412,74 \text{ cm}^3$ ✓
- **Angle du secteur du patron** : $\frac{r}{g} \times 360 = 0,6 \times 360 = 216^\circ$ ✓
- **Contrôle de l'aire du secteur** : $0,6 \times \pi \times 400 = 240\pi$ ✓
- **Cohérence** : c'est bien l'aire latérale ✓
- **Cône « plat »** : si l'angle d'ouverture approchait 180° , la hauteur tendrait vers 0 ✓
- **Cône « pointu »** : un angle proche de 0° donnerait $h \approx g$ ✓

Réponse. $h = 16 \text{ cm}$, $\alpha \approx 36,87^\circ$ (ouverture $\approx 73,74^\circ$), aire latérale $240\pi \approx 753,98 \text{ cm}^2$.

Correction de l'exercice 13 - Deux pyramides dans un cube

- **Base de la pyramide** : une face du cube, d'aire 144 cm^2 ✓
- **Hauteur** : la distance du centre à cette face, soit $\frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$ ✓
- **Volume** :

$$V = \frac{144 \times 6}{3} = 288 \text{ cm}^3$$

- **Volume du cube** : $12^3 = 1728 \text{ cm}^3$ ✓
- **Nombre de pyramides** : $\frac{1728}{288} = 6$ ✓
- **Interprétation** : les six faces donnent six pyramides identiques ✓
- **Vérification du remplissage** : elles ont toutes le même sommet, le centre ✓
- **Conclusion** : elles pavent bien le cube, sans recouvrement ✓
- **Contrôle par le calcul général** : $6 \times \frac{a^2 \times \frac{a}{2}}{3} = 6 \times \frac{a^3}{6} = a^3$ ✓
- **Arête latérale de chaque pyramide** : c'est la distance du centre à un sommet, soit $\frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \approx 10,392 \text{ cm}$ ✓
- **Apothème** : la distance du centre à une arête, soit $\frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \approx 8,485 \text{ cm}$ ✓
- **Contrôle** : $\sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}$ ✓
- **Aire d'une face latérale** : $\frac{12 \times 6\sqrt{2}}{2} = 36\sqrt{2} \approx 50,912 \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire latérale de la pyramide** : $4 \times 36\sqrt{2} = 144\sqrt{2} \approx 203,647 \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire totale de la pyramide** : $144 + 144\sqrt{2} \approx 347,65 \text{ cm}^2$ ✓
- **Somme des six aires totales** : $6 \times 347,65 \approx 2085,9 \text{ cm}^2$ ✓
- **Comparaison à l'aire du cube** : 864 cm^2 , bien moindre — car les faces internes sont comptées deux fois ✓

Réponse. $V = 288 \text{ cm}^3$, et $6 \times 288 = 1728 \text{ cm}^3$: les six pyramides remplissent exactement le cube.

Correction de l'exercice 14 - Coordonnées dans l'espace

- **Formule de la distance dans l'espace** : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ ✓
- **Écarts** : $5 - 1 = 4$, $-2 - 2 = -4$ et $9 - 3 = 6$ ✓
- **Carrés** : 16, 16 et 36 ✓
- **Somme** : 68 ✓
- **Distance** :

$$AB = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \approx 8,246$$

- **Milieu** : on prend la moyenne coordonnée par coordonnée ✓
- **Calcul** :

$$I\left(\frac{1+5}{2}; \frac{2-2}{2}; \frac{3+9}{2}\right) = (3; 0; 6)$$

- **Contrôle de AI** : $\sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17} \approx 4,123$ ✓
- **Contrôle de IB** : $\sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17}$ ✓
- **Cohérence** : $AI = IB = \frac{AB}{2}$ ✓
- **Distance de A à l'origine** : $\sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14} \approx 3,742$ ✓
- **Distance de B à l'origine** : $\sqrt{25 + 4 + 81} = \sqrt{110} \approx 10,488$ ✓
- **Le triangle OAB est-il rectangle ?** $14 + 68 = 82 \neq 110$ ✓
- **Autre test** : $110 \neq 14 + 68$, et $68 \neq 14 + 110$ ✓
- **Conclusion** : il n'est pas rectangle ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{AB}$** : $(4; -4; 6)$ ✓
- **Point C tel que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$** : $C(9; -6; 15)$ ✓
- **Contrôle** : $\overrightarrow{AC} = (8; -8; 12) = 2(4; -4; 6)$ ✓

Réponse. $AB = 2\sqrt{17} \approx 8,25$ et le milieu est $I(3; 0; 6)$.

Correction de l'exercice 15 - Volume d'un tronc de pyramide

- **Rapport de réduction** : $k = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \checkmark$
- **Notation** : h la hauteur de la petite pyramide $\checkmark$
- **Relation** : $\frac{h}{h+6} = \frac{2}{3} \checkmark$
- **Produit en croix** : $3h = 2h + 12 \checkmark$
- **Résolution** : $h = 12$ cm $\checkmark$
- **Hauteur de la grande pyramide** : 18 cm $\checkmark$
- **Contrôle du rapport** : $\frac{12}{18} = \frac{2}{3} \checkmark$
- **Volume de la grande pyramide** : $\frac{144 \times 18}{3} = 864$ cm³ $\checkmark$
- **Volume de la petite** : $\frac{64 \times 12}{3} = 256$ cm³ $\checkmark$
- **Contrôle par le rapport** : $864 \times \frac{8}{27} = 256$ cm³ $\checkmark$
- **Volume du tronc** :

$$V = 864 - 256 = 608 \text{ cm}^3$$
- **Contrôle par la formule du tronc** : $\frac{h}{3}(A + \sqrt{AA'} + A') \checkmark$
- **Calcul** : $\frac{6}{3}(144 + 96 + 64) = 2 \times 304 = 608$ cm³ $\checkmark$
- **Détail** : $\sqrt{144 \times 64} = \sqrt{9216} = 96 \checkmark$
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent $\checkmark$
- **Contrôle de vraisemblance** : un prisme de base moyenne 100 cm² et hauteur 6 cm ferait 600 cm³ $\checkmark$
- **Comparaison** : 608 est très proche, la forme étant peu évasée $\checkmark$

Réponse. $V = 864 - 256 = 608$ cm³.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une tente pyramidale

- a) **Demi-côté** : 1,5 m $\checkmark$
- **Apothème** : $\sqrt{2,4^2 + 1,5^2} \checkmark$
 - **Calcul** : $\sqrt{5,76 + 2,25} = \sqrt{8,01} \approx 2,830$ m $\checkmark$
 - **Aire d'une face** : $\frac{3 \times 2,830}{2} \approx 4,245$ m² $\checkmark$
 - **Aire de toile** :

$$A = 4 \times 4,245 \approx 16,98 \text{ m}^2$$
 - **Contrôle exact** : $2 \times 3 \times \sqrt{8,01} = 6\sqrt{8,01} \approx 16,981$ m² $\checkmark$
 - **Coût à 14 €/m²** : environ 238 € $\checkmark$
- b) **Aire de base** : 9 m² $\checkmark$
- **Volume** :

$$V = \frac{9 \times 2,4}{3} = 7,2 \text{ m}^3$$
 - **Contrôle de vraisemblance** : un pavé de même base et hauteur ferait 21,6 m³, et la pyramide en fait le tiers $\checkmark$
 - **Hauteur utile** : à mi-hauteur, la section est un carré de 1,5 m de côté $\checkmark$

— **Contrôle** : le rapport de réduction vaut $\frac{1}{2}$ ✓

c) **Demi-diagonale de la base** : $\frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2,121 \text{ m}$ ✓

— **Arête latérale** : $\sqrt{2,4^2 + 2,121^2}$ ✓

— **Calcul** : $\sqrt{5,76 + 4,5} = \sqrt{10,26} \approx 3,203 \text{ m}$ ✓

— **Contrôle exact** : $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{18}{4} = 4,5$ ✓

— **Angle avec le sol** : $\tan \beta = \frac{2,4}{2,121}$ ✓

— **Calcul** : $\tan \beta \approx 1,1314$ ✓

— **Mesure** :

$$\beta \approx 48,53^\circ$$

— **Contrôle** : $\cos \beta = \frac{2,121}{3,203} \approx 0,6622$, et $\arccos(0,6622) \approx 48,53^\circ$ ✓

— **Angle des faces avec le sol, pour comparaison** : $\tan \gamma = \frac{2,4}{1,5} = 1,6$, soit $\gamma \approx 57,99^\circ$ ✓

— **Cohérence** : la face est plus redressée que l'arête ✓

d) **Rapport des volumes** : 2 ✓

— **Rapport des longueurs** : $k = \sqrt[3]{2} \approx 1,2599$ ✓

— **Nouveau côté** : $3 \times 1,2599 \approx 3,780 \text{ m}$ ✓

— **Nouvelle hauteur** : $2,4 \times 1,2599 \approx 3,024 \text{ m}$ ✓

— **Nouveau volume** : $\frac{3,780^2 \times 3,024}{3} \approx 14,40 \text{ m}^3$ ✓

— **Contrôle** : c'est bien le double de $7,2 \text{ m}^3$ ✓

— **Rapport des aires** : $k^2 = \sqrt[3]{4} \approx 1,5874$ ✓

— **Nouvelle aire de toile** :

$$16,98 \times 1,5874 \approx 26,95 \text{ m}^2$$

— **Contrôle direct** : nouveau apothème $\approx 2,830 \times 1,2599 \approx 3,566 \text{ m}$ ✓

— **Puis** : $2 \times 3,780 \times 3,566 \approx 26,96 \text{ m}^2$ ✓

— **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓

— **Augmentation de toile** : environ 58,7 % pour un volume doublé ✓

— **Nouveau coût** : $26,95 \times 14 \approx 377 \text{ €}$ ✓

— **Coût par m³** : $\frac{238}{7,2} \approx 33,06 \text{ €}$ contre $\frac{377}{14,4} \approx 26,18 \text{ €}$ ✓

— **Conclusion** : la grande tente est plus économique par mètre cube, dans le rapport $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,794$ ✓

Réponse. a) apothème $\sqrt{8,01} \approx 2,83 \text{ m}$ et $\approx 16,98 \text{ m}^2$ de toile · b) $7,2 \text{ m}^3$ · c) arête $\approx 3,20 \text{ m}$, angle $\approx 48,53^\circ$ · d) côté $\approx 3,78 \text{ m}$, hauteur $\approx 3,02 \text{ m}$, toile $\approx 26,95 \text{ m}^2$.