

Plaquette 2 - Positions relatives et sections planes

Géométrie dans l'espace — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Positions relatives de deux droites de l'espace.

Position	Coplanaires ?	Points communs
sécantes	oui	1
parallèles distinctes	oui	0
confondues	oui	une infinité
non coplanaires	non	0

Deux droites sans point commun ne sont pas forcément parallèles : dans l'espace, elles peuvent être **non coplanaires**.

Positions relatives d'une droite et d'un plan.

Position	Points communs
droite contenue dans le plan	une infinité
droite sécante au plan	1
droite parallèle au plan	0

Positions relatives de deux plans.

Position	Intersection
sécants	une droite
parallèles distincts	vide
confondus	le plan

Théorème du toit et parallélisme. Si deux plans sécants contiennent chacun une de deux droites parallèles, leur droite d'intersection est parallèle à ces deux droites.

Sections planes d'un solide. L'intersection d'un plan avec un solide est un **polygone** dont les côtés sont les intersections du plan avec les faces.

Solide	Plan	Section
pavé ou cube	parallèle à une face	rectangle identique à cette face
pavé	contenant deux arêtes opposées	rectangle
cube	passant par trois sommets voisins d'un sommet	triangle équilatéral
cylindre	parallèle à la base	disque de même rayon
cylindre	contenant l'axe	rectangle
cône ou pyramide	parallèle à la base	figure réduite de la base
sphère	quelconque (sécant)	cercle

Réduction dans un cône ou une pyramide. Un plan parallèle à la base à la hauteur k (en fraction de la hauteur totale, comptée depuis le sommet) donne une section

réduite de rapport k : les longueurs sont multipliées par k , les aires par k^2 , les volumes par k^3 .

Correction de l'exercice 1 - Droites d'un cube

- **Repérage** : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux carrés superposés, avec E au-dessus de A , F au-dessus de B , et ainsi de suite ✓
- **Droites (AB) et (GH)** : AB est une arête du bas, GH une arête du haut ✓
- **Correspondance** : G est au-dessus de C et H au-dessus de D ✓
- **Or** : (CD) est parallèle à (AB) dans le carré $ABCD$ ✓
- **Donc** : (GH) est parallèle à (CD) , elle-même parallèle à (AB) ✓
- **Conclusion** : (AB) et (GH) sont **parallèles** ✓
- **Coplanarité** : elles sont dans le plan $(ABGH)$ ✓
- **Droites (AB) et (CG)** : (CG) est une arête **verticale** ✓
- **Points communs** : aucun, C et G n'étant pas sur (AB) ✓
- **Parallèles ?** Non, l'une est horizontale et l'autre verticale ✓
- **Conclusion** : elles sont **non coplanaires** ✓
- **Vérification** : aucun plan ne contient à la fois l'arête $[AB]$ et l'arête $[CG]$ ✓
- **Droites (AE) et (CG)** : les deux sont verticales ✓
- **Conclusion** : elles sont **parallèles** ✓
- **Plan les contenant** : le plan diagonal $(ACGE)$ ✓
- **Une paire supplémentaire** : (AB) et (CD) sont parallèles dans le plan de la face du bas ✓

Réponse. (AB) et (GH) : parallèles · (AB) et (CG) : **non coplanaires** · (AE) et (CG) : parallèles.

Correction de l'exercice 2 - Droite et plan

- **Nature du plan (ABC)** : c'est le plan de la face du bas, qui contient aussi D ✓
- **Droite (EG)** : c'est une diagonale de la face du haut ✓
- **Position** : entièrement dans le plan de la face du haut ✓
- **Or** : les deux faces sont **parallèles** ✓
- **Conclusion** : (EG) est **parallèle** au plan (ABC) ✓
- **Contrôle** : (EG) est parallèle à (AC) , qui est dans le plan ✓
- **Droite (AG)** : c'est une grande diagonale du cube ✓
- **Point commun avec le plan** : le point A ✓
- **Autre point commun ?** Non, G étant sur la face du haut ✓
- **Conclusion** : (AG) est **sécante** au plan, en A ✓
- **Droite (AC)** : c'est une diagonale de la face du bas ✓
- **Conclusion** : elle est **contenue** dans le plan (ABC) ✓
- **Droite (AE)** : elle est perpendiculaire au plan du bas, donc sécante en A ✓
- **Droite (EF)** : elle est dans la face du haut, donc **parallèle** au plan du bas ✓
- **Règle utile** : une droite est parallèle à un plan dès qu'elle est parallèle à **une** droite de ce plan ✓
- **Contrôle avec (EF)** : elle est parallèle à (AB) , qui est dans le plan ✓

Réponse. (EG) : parallèle au plan · (AG) : sécante en A · (AC) : contenue dans le plan.

Correction de l'exercice 3 – Deux plans d'un pavé

- **Plan** (ABF) : il contient A, B, F et aussi E ✓
- **Nature** : c'est le plan de la face avant $ABFE$ ✓
- **Plan** (BCG) : il contient B, C, G et aussi F ✓
- **Nature** : c'est le plan de la face droite $BCGF$ ✓
- **Points communs visibles** : B et F ✓
- **Conclusion** : l'intersection est la droite (BF) ✓
- **Contrôle** : $[BF]$ est bien l'arête commune aux deux faces ✓
- **Position relative** : les deux plans sont **sécants** ✓
- **Plan** (ABC) : la face du bas ✓
- **Plan** (EFG) : la face du haut ✓
- **Points communs** : **aucun** ✓
- **Conclusion** : les deux plans sont **parallèles** ✓
- **Intersection** : l'ensemble **vide** ✓
- **Autre paire sécante** : (ABC) et (ABF) , d'intersection (AB) ✓
- **Règle générale** : deux plans distincts sont soit parallèles, soit sécants selon une droite ✓
- **Cas impossible** : deux plans distincts ne peuvent se couper en un **seul** point ✓
- **Justification** : s'ils ont deux points communs, ils contiennent toute la droite qui les joint ✓

Réponse. $(ABF) \cap (BCG) = (BF) \cdot (ABC)$ et (EFG) sont parallèles, d'intersection vide.

Correction de l'exercice 4 – Section parallèle à une face

- **Nature de la section** : un plan parallèle à une face d'un pavé donne un rectangle **identique** à cette face ✓
- **Dimensions de la section** : 8 cm par 5 cm ✓
- **Aire** :

$$A = 8 \times 5 = 40 \text{ cm}^2$$

- **Remarque importante** : cette aire ne dépend **pas** de la hauteur de la coupe ✓
- **Volume total du pavé** : $8 \times 5 \times 12 = 480 \text{ cm}^3$ ✓
- **Premier morceau** (hauteur 9 cm) : $40 \times 9 = 360 \text{ cm}^3$ ✓
- **Second morceau** (hauteur 3 cm) : $40 \times 3 = 120 \text{ cm}^3$ ✓
- **Contrôle de la somme** : $360 + 120 = 480 \text{ cm}^3$ ✓
- **Rapport des volumes** : $\frac{360}{120} = 3$ ✓
- **Cohérence** : c'est aussi le rapport des hauteurs, $\frac{9}{3} = 3$ ✓
- **Explication** : les deux morceaux ont la **même** base, leurs volumes sont donc proportionnels aux hauteurs ✓
- **Hauteur pour un partage en deux volumes égaux** : 6 cm ✓
- **Contrôle** : $40 \times 6 = 240 \text{ cm}^3$, soit la moitié de 480 ✓
- **Aire totale du pavé** : $2(40 + 96 + 60) = 2 \times 196 = 392 \text{ cm}^2$ ✓
- **Contrôle** : $8 \times 5 = 40$, $8 \times 12 = 96$ et $5 \times 12 = 60$ ✓
- **Aire du premier morceau** : $2 \times 40 + 2 \times 72 + 2 \times 45 = 80 + 144 + 90 = 314 \text{ cm}^2$ ✓

Réponse. Un rectangle de 8×5 cm, d'aire 40 cm^2 ; volumes 360 cm^3 et 120 cm^3 .

Correction de l'exercice 5 - Section d'un cylindre

- **Plan parallèle à la base** : la section est un **disque** ✓
- **Rayon** : le même que celui de la base, soit 6 cm ✓
- **Aire** :

$$A = \pi \times 36 \approx 113,10 \text{ cm}^2$$

- **Indépendance de la hauteur** : la section est la même à toute hauteur ✓
- **Plan contenant l'axe** : la section est un **rectangle** ✓
- **Largeur** : le diamètre, soit 12 cm ✓
- **Hauteur** : celle du cylindre, 15 cm ✓
- **Aire** :

$$A = 12 \times 15 = 180 \text{ cm}^2$$

- **Volume du cylindre** : $\pi \times 36 \times 15 = 540\pi \approx 1696,46 \text{ cm}^3$ ✓
- **Aire latérale** : $2\pi \times 6 \times 15 = 180\pi \approx 565,49 \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire totale** : $180\pi + 2 \times 36\pi = 252\pi \approx 791,68 \text{ cm}^2$ ✓
- **Plan parallèle à l'axe mais ne le contenant pas** : la section est encore un rectangle, mais **plus étroit** ✓
- **Exemple à 3 cm de l'axe** : la demi-largeur vaut $\sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \approx 5,196 \text{ cm}$ ✓
- **Largeur** : $6\sqrt{3} \approx 10,392 \text{ cm}$ ✓
- **Aire de cette section** : $10,392 \times 15 \approx 155,88 \text{ cm}^2$ ✓
- **Comparaison** : $155,88 < 180$, la section contenant l'axe est la **plus grande** ✓
- **Cas limite** : à 6 cm de l'axe, le plan est tangent et la section se réduit à un segment ✓

Réponse. Disque de rayon 6 cm (aire $\approx 113,10 \text{ cm}^2$) ; rectangle $12 \times 15 \text{ cm}$ (aire 180 cm^2).

Correction de l'exercice 6 - Section d'un cône

- **Rapport de réduction** : $k = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ ✓
- **Nature de la section** : un **disque** ✓
- **Rayon de la section** : $9 \times \frac{2}{3} = 6 \text{ cm}$ ✓
- **Aire de la section** : $\pi \times 36 \approx 113,10 \text{ cm}^2$ ✓
- **Volume du grand cône** : $\frac{\pi \times 81 \times 24}{3} = 648\pi \approx 2035,75 \text{ cm}^3$ ✓
- **Volume du petit cône** : on multiplie par k^3 ✓
- **Calcul** : $k^3 = \frac{8}{27}$ ✓
- **Résultat** :

$$V = 648\pi \times \frac{8}{27} = 192\pi \approx 603,19 \text{ cm}^3$$

- **Contrôle direct** : $\frac{\pi \times 36 \times 16}{3} = 192\pi$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
- **Volume du tronc restant** : $648\pi - 192\pi = 456\pi \approx 1432,57 \text{ cm}^3$ ✓
- **Rapport des volumes** : $\frac{192}{648} = \frac{8}{27} \approx 0,296$ ✓
- **Observation frappante** : le petit cône, haut des deux tiers, ne représente que 30 % du volume ✓

- **Hauteur pour un partage en deux volumes égaux** : $k^3 = \frac{1}{2}$, donc $k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,7937$ ✓
- **Hauteur correspondante** : $24 \times 0,7937 \approx 19,05$ cm ✓
- **Contrôle** : $648\pi \times 0,5 = 324\pi$, et $\frac{\pi \times (9 \times 0,7937)^2 \times 19,05}{3} \approx 324\pi$ ✓
- **Rapport des aires de base** : $k^2 = \frac{4}{9} \approx 0,444$ ✓

Réponse. Un disque de rayon 6 cm ; le petit cône a un volume de $192\pi \approx 603,19$ cm³.

Correction de l'exercice 7 - Section d'une pyramide

- **Distance au sommet** : $18 - 6 = 12$ cm ✓
- **Rapport de réduction** : $k = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ ✓
- **Nature de la section** : un **carré** ✓
- **Côté de la section** : $12 \times \frac{2}{3} = 8$ cm ✓
- **Aire** :

$$A = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$$
- **Contrôle par le rapport des aires** : $144 \times \frac{4}{9} = 64 \text{ cm}^2$ ✓
- **Piège** : la distance donnée est mesurée depuis la **base**, non depuis le sommet ✓
- **Erreur à éviter** : prendre $k = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$, ce qui donnerait un côté de 4 cm ✓
- **Volume de la grande pyramide** : $\frac{144 \times 18}{3} = 864 \text{ cm}^3$ ✓
- **Volume de la petite pyramide** : $864 \times \frac{8}{27} = 256 \text{ cm}^3$ ✓
- **Contrôle direct** : $\frac{64 \times 12}{3} = 256 \text{ cm}^3$ ✓
- **Volume du tronc** : $864 - 256 = 608 \text{ cm}^3$ ✓
- **Part du tronc** : $\frac{608}{864} \approx 70,4\%$ ✓
- **Section à mi-hauteur** : $k = \frac{1}{2}$, côté 6 cm, aire 36 cm^2 ✓
- **Volume de la pyramide correspondante** : $864 \times \frac{1}{8} = 108 \text{ cm}^3$ ✓
- **Lecture** : couper à mi-hauteur laisse au-dessus **un huitième** du volume ✓
- **Contrôle direct** : $\frac{36 \times 9}{3} = 108 \text{ cm}^3$ ✓

Réponse. Un carré de 8 cm de côté, d'aire 64 cm².

Correction de l'exercice 8 - Section d'une sphère

- **Nature de la section** : un **cercle** ✓
- **Relation clé** : le rayon r de la section, la distance d au centre et le rayon R de la sphère forment un triangle rectangle ✓
- **Théorème de Pythagore** : $r^2 + d^2 = R^2$ ✓
- **Calcul** : $r^2 = 169 - 25 = 144$ ✓
- **Rayon de la section** :

$$r = 12 \text{ cm}$$
- **Aire du disque de section** : $\pi \times 144 \approx 452,39 \text{ cm}^2$ ✓
- **Triplet pythagoricien** : 5-12-13 ✓

- **Section passant par le centre** : $d = 0$, donc $r = 13$ cm ✓
- **Nom de cette section** : un **grand cercle** ✓
- **Aire du grand cercle** : $\pi \times 169 \approx 530,93$ cm² ✓
- **Section à 12 cm du centre** : $r = \sqrt{169 - 144} = 5$ cm ✓
- **Section à 13 cm** : $r = 0$, le plan est **tangent** ✓
- **Au-delà de 13 cm** : aucune intersection ✓
- **Volume de la sphère** : $\frac{4\pi \times 2197}{3} \approx 9202,77$ cm³ ✓
- **Aire de la sphère** : $4\pi \times 169 \approx 2123,72$ cm² ✓
- **Règle générale** : plus le plan s'éloigne du centre, plus le cercle de section est **petit** ✓
- **Contrôle** : $12 > 5$ quand d passe de 5 à 12 cm ✓

Réponse. Un cercle de rayon $\sqrt{169 - 25} = 12$ cm, d'aire $144\pi \approx 452,39$ cm².

Correction de l'exercice 9 - Section triangulaire d'un cube

- **Les trois points** : les milieux des arêtes issues d'un sommet, chacun à 3 cm de ce sommet ✓
- **Distance entre deux de ces points** : par Pythagore dans un triangle rectangle isocèle ✓
- **Calcul** : $\sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,243$ cm ✓
- **Nature de la section** : les trois distances étant égales, c'est un **triangle équilatéral** ✓
- **Côté** : $3\sqrt{2}$ cm ✓
- **Aire d'un triangle équilatéral de côté c** : $\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$ ✓
- **Calcul** : $c^2 = 18$ ✓
- **Aire** :

$$A = \frac{18\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \approx 7,794 \text{ cm}^2$$

- **Volume du petit tétraèdre découpé** : $\frac{1}{3} \times \frac{3 \times 3}{2} \times 3$ ✓
- **Calcul** : $\frac{1}{3} \times 4,5 \times 3 = 4,5$ cm³ ✓
- **Volume du cube** : 216 cm³ ✓
- **Part découpée** : $\frac{4,5}{216} \approx 2,08\%$ ✓
- **Volume restant** : 211,5 cm³ ✓
- **Si l'on coupait par les trois sommets voisins** (et non les milieux) : le côté du triangle serait $6\sqrt{2} \approx 8,485$ cm ✓
- **Aire alors** : $\frac{72\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3} \approx 31,18$ cm² ✓
- **Rapport des aires** : 4, conforme au carré du rapport des côtés ✓
- **Volume découpé alors** : $\frac{1}{3} \times 18 \times 6 = 36$ cm³, soit $\frac{1}{6}$ du cube ✓

Réponse. Un triangle **équilatéral** de côté $3\sqrt{2}$ cm, d'aire $\frac{9\sqrt{3}}{2} \approx 7,79$ cm².

Correction de l'exercice 10 - Parallélisme dans un pavé

- **Plan (ABG)** : il contient A, B, G ✓
- **Quatrième sommet** : il contient aussi H , car $ABGH$ est un rectangle ✓

- **Justification** : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$, les deux arêtes étant parallèles et de même longueur ✓
- **Plan** (CDE) : il contient C, D, E ✓
- **Quatrième sommet** : il contient aussi F, car CDEF est un rectangle ✓
- **Justification** : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$ ✓
- **Les deux plans sont des rectangles « diagonaux » du cube** ✓
- **Intersection de** (ABGH) **avec la face du bas** : la droite (AB) ✓
- **Intersection de** (CDEF) **avec la face du bas** : la droite (DC) ✓
- **Or** : (AB) et (DC) sont parallèles ✓
- **Théorème du toit** : deux plans sécants contenant chacun l'une de deux droites parallèles se coupent selon une droite **parallèle** à ces droites ✓
- **Existence de l'intersection** : les plans ne sont pas parallèles, l'un montant vers l'arrière et l'autre vers l'avant ✓
- **Recherche de deux points communs** : on cherche des points appartenant aux **deux** rectangles ✓
- **Premier point** : le centre de la face ADHE, c'est-à-dire le milieu de la diagonale [DE] ✓
- **Vérification** : ce point est sur [AH], côté de (ABGH), et sur [DE], côté de (CDEF) ✓
- **Second point** : le centre de la face BCGF, milieu de la diagonale [CF] ✓
- **Vérification** : il est sur [BG] et sur [CF] ✓
- **Intersection** : la droite joignant ces deux centres de faces ✓
- **Contrôle du parallélisme** : cette droite est bien parallèle à (AB), comme l'annonçait le théorème du toit ✓
- **Position** : elle passe par le **centre du cube**, à mi-hauteur ✓

Réponse. Ils sont sécants selon la droite parallèle à (AB) joignant les centres des faces ADHE et BCGF (milieux de [DE] et [CF]), qui passe par le centre du cube.

Correction de l'exercice 11 - Volume d'un tronc de cône

- **Rapport de réduction** : $k = \frac{4}{10} = 0,4$ ✓
- **Notation** : h la hauteur du petit cône ✓
- **Relation** : $\frac{h}{h+9} = 0,4$ ✓
- **Produit en croix** : $h = 0,4h + 3,6$ ✓
- **Résolution** : $0,6h = 3,6$, donc $h = 6$ cm ✓
- **Hauteur du grand cône** : $6 + 9 = 15$ cm ✓
- **Contrôle du rapport** : $\frac{6}{15} = 0,4$ ✓
- **Volume du grand cône** : $\frac{\pi \times 100 \times 15}{3} = 500\pi$ cm³ ✓
- **Volume du petit cône** : $\frac{\pi \times 16 \times 6}{3} = 32\pi$ cm³ ✓
- **Contrôle par le rapport** : $500\pi \times 0,4^3 = 500\pi \times 0,064 = 32\pi$ ✓
- **Volume du tronc** :

$$V = 500\pi - 32\pi = 468\pi \approx 1470,27 \text{ cm}^3$$
- **Contrôle de vraisemblance** : un cylindre de rayon moyen 7 cm et hauteur 9 cm ferait 441π cm³ ✓
- **Comparaison** : $468\pi > 441\pi$, le tronc est un peu plus gros ✓
- **Explication** : le volume dépend du carré du rayon, la partie large pèse donc davantage ✓

- **Formule directe du tronc** : $\frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) \checkmark$
 - **Contrôle** : $\frac{9\pi}{3}(100 + 40 + 16) = 3\pi \times 156 = 468\pi \checkmark$
 - **Cohérence** : les deux méthodes concordent $\checkmark$
- Réponse.** $V = 500\pi - 32\pi = 468\pi \approx 1470,27 \text{ cm}^3$.

Correction de l'exercice 12 - Perpendicularité dans l'espace

- **Critère de perpendicularité droite-plan** : la droite doit être perpendiculaire à **deux** droites sécantes du plan $\checkmark$
- **Première droite du plan** : $(AB) \checkmark$
- **Perpendicularité** : $ABFE$ est un carré, donc $(AE) \perp (AB) \checkmark$
- **Seconde droite du plan** : $(AD) \checkmark$
- **Perpendicularité** : $ADHE$ est un carré, donc $(AE) \perp (AD) \checkmark$
- **Sécance** : (AB) et (AD) se coupent en $A \checkmark$
- **Conclusion** : (AE) est **perpendiculaire au plan** $(ABC) \checkmark$
- **Conséquence puissante** : (AE) est alors perpendiculaire à **toute** droite du plan $\checkmark$
- **Application à** (BD) : cette droite est la diagonale de la face du bas $\checkmark$
- **Appartenance** : (BD) est contenue dans le plan $(ABC) \checkmark$
- **Conclusion** : $(AE) \perp (BD) \checkmark$
- **Remarque** : les deux droites ne se coupent pas, elles sont **non coplanaires** $\checkmark$
- **Précision de vocabulaire** : on parle alors d'**orthogonalité** plutôt que de perpendicularité $\checkmark$
- **Application à** (AC) : également orthogonale à $(AE) \checkmark$
- **Contrôle avec l'arête** $[EF]$: elle est parallèle à (AB) , donc orthogonale à $(AE) \checkmark$
- **Contre-exemple utile** : (AG) , la grande diagonale, **n'est pas** orthogonale à $(AE) \checkmark$
- **Justification** : elle n'est pas contenue dans le plan du bas, l'argument ne s'applique pas $\checkmark$

Réponse. $(AE) \perp (AB)$ et $(AE) \perp (AD)$, sécantes en A , donc $(AE) \perp (ABC)$ — et par conséquent $(AE) \perp (BD)$.

Correction de l'exercice 13 - Patron et section

- **Patron d'un cylindre** : deux disques et un rectangle $\checkmark$
- **Rayon des disques** : 5 cm $\checkmark$
- **Largeur du rectangle** : le périmètre du disque, soit $2\pi \times 5 = 10\pi \approx 31,416 \text{ cm} \checkmark$
- **Hauteur du rectangle** : 12 cm $\checkmark$
- **Aire latérale** : $10\pi \times 12 = 120\pi \approx 376,99 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Aire des deux disques** : $2 \times \pi \times 25 = 50\pi \approx 157,08 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Aire totale** :

$$A = 120\pi + 50\pi = 170\pi \approx 534,07 \text{ cm}^2$$

- **Diagonale du rectangle latéral** : $\sqrt{(10\pi)^2 + 144} \checkmark$
- **Calcul** : $(10\pi)^2 \approx 986,96 \checkmark$
- **Somme** : $986,96 + 144 = 1130,96 \checkmark$
- **Diagonale** :

$$\approx 33,63 \text{ cm}$$

- **Interprétation** : c'est la longueur du chemin **le plus court** enroulé autour du cylindre, d'un bord à l'autre ✓
- **Volume du cylindre** : $\pi \times 25 \times 12 = 300\pi \approx 942,48 \text{ cm}^3$ ✓
- **Comparaison avec un cube de même volume** : côté $\sqrt[3]{942,48} \approx 9,80 \text{ cm}$ ✓
- **Aire de ce cube** : $6 \times 96,04 \approx 576,24 \text{ cm}^2$ ✓
- **Comparaison** : $534,07 < 576,24$, le cylindre est plus **économique** en matière ✓
- **Raison** : à volume égal, les formes arrondies minimisent la surface ✓

Réponse. Deux disques de rayon 5 cm et un rectangle $10\pi \times 12 \text{ cm}$; aire totale $170\pi \approx 534,07 \text{ cm}^2$, diagonale $\approx 33,63 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 14 - Boule inscrite dans un cube

- **Rayon de la boule** : la moitié de l'arête, soit 5 cm ✓
- **Justification** : la boule touche les six faces, son diamètre égale l'arête ✓
- **Volume de la boule** : $\frac{4\pi \times 125}{3} = \frac{500\pi}{3}$ ✓
- **Valeur approchée** :
$$V \approx 523,60 \text{ cm}^3$$
- **Volume du cube** : 1000 cm^3 ✓
- **Proportion** : $\frac{523,60}{1000} \approx 52,36 \%$ ✓
- **Valeur exacte de la proportion** : $\frac{\pi}{6} \approx 0,5236$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{\frac{500\pi}{3}}{1000} = \frac{\pi}{6}$ ✓
- **Remarque** : cette proportion ne dépend **pas** de l'arête ✓
- **Justification** : les deux volumes sont proportionnels au cube de l'arête ✓
- **Volume perdu** : $1000 - 523,60 = 476,40 \text{ cm}^3$ ✓
- **Aire de la boule** : $4\pi \times 25 = 100\pi \approx 314,16 \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire du cube** : $6 \times 100 = 600 \text{ cm}^2$ ✓
- **Proportion des aires** : $\frac{314,16}{600} \approx 52,36 \%$ ✓
- **Coïncidence remarquable** : le **même** rapport $\frac{\pi}{6}$ ✓
- **Boule circonscrite, pour comparaison** : son rayon est la moitié de la grande diagonale, soit $5\sqrt{3} \approx 8,660 \text{ cm}$ ✓
- **Son volume** : $\frac{4\pi \times 649,52}{3} \approx 2720,70 \text{ cm}^3$, soit 2,72 fois celui du cube ✓

Réponse. $V = \frac{500\pi}{3} \approx 523,60 \text{ cm}^3$, soit $\frac{\pi}{6} \approx 52,36 \%$ du cube.

Correction de l'exercice 15 - Deux cylindres de même volume

- **Volume de A** : $\pi \times 16 \times 18 = 288\pi \approx 904,78 \text{ cm}^3$ ✓
- **Volume de B** : $\pi \times 36 \times h$ ✓
- **Égalité** : $36h = 288$ ✓
- **Résolution** :

$$h = 8 \text{ cm}$$

- **Contrôle** : $\pi \times 36 \times 8 = 288\pi$ ✓
- **Observation** : le rayon est multiplié par 1,5, la hauteur divisée par 2,25 ✓
- **Cohérence** : $1,5^2 = 2,25$ ✓

- **Aire totale de A** : $2\pi \times 16 + 2\pi \times 4 \times 18 = 32\pi + 144\pi = 176\pi \approx 552,92 \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire totale de B** : $2\pi \times 36 + 2\pi \times 6 \times 8 = 72\pi + 96\pi = 168\pi \approx 527,79 \text{ cm}^2$ ✓
- **Comparaison** : $168\pi < 176\pi$ ✓
- **Conclusion** : B est plus **économique** en matière ✓
- **Écart** : $8\pi \approx 25,13 \text{ cm}^2$, soit 4,5 % ✓
- **Cylindre optimal à volume donné** : celui dont la hauteur égale le **diamètre** ✓
- **Recherche du rayon optimal** : on cherche r tel que $h = 2r$ et $\pi r^2 \times 2r = 288\pi$ ✓
- **Équation** : $2r^3 = 288$, donc $r^3 = 144$ et $r \approx 5,241 \text{ cm}$ ✓
- **Hauteur** : $\approx 10,483 \text{ cm}$ ✓
- **Aire totale minimale** : $2\pi \times 27,47 + 2\pi \times 5,241 \times 10,483 \approx 172,6 + 345,2 \approx 517,9 \text{ cm}^2$ ✓
- **Comparaison** : $517,9 < 527,79 < 552,92$, B est proche de l'optimum ✓

Réponse. $h = 8 \text{ cm}$; aire de A = $176\pi \approx 552,92 \text{ cm}^2$ contre $168\pi \approx 527,79 \text{ cm}^2$ pour B, qui est plus économique.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une piscine et ses aménagements

a) **Volume du pavé** :

$$V = 12 \times 6 \times 2 = 144 \text{ m}^3$$

- **Conversion** : $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$ ✓
- **Volume en litres** : 144 000 L ✓

b) **Hauteur d'eau** : 1,70 m ✓

— **Volume** :

$$12 \times 6 \times 1,70 = 122,4 \text{ m}^3$$

- **En litres** : 122 400 L ✓
- **Proportion remplie** : $\frac{1,70}{2} = 85 \%$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{122,4}{144} = 0,85$ ✓
- **Volume manquant** : $144 - 122,4 = 21,6 \text{ m}^3$ ✓

c) **Aire du fond** : $12 \times 6 = 72 \text{ m}^2$ ✓

- **Deux grandes parois** : $2 \times (12 \times 2) = 48 \text{ m}^2$ ✓
- **Deux petites parois** : $2 \times (6 \times 2) = 24 \text{ m}^2$ ✓
- **Surface totale à carreler** :

$$72 + 48 + 24 = 144 \text{ m}^2$$

- **Coïncidence numérique** : la surface en m^2 égale le volume en m^3 ✓
- **Coût à 45 €/m²** : $144 \times 45 = 6480 \text{ €}$ ✓
- **Nombre de carreaux de 30 × 30 cm** : chacun couvre 0,09 m² ✓
- **Calcul** : $\frac{144}{0,09} = 1600$ carreaux ✓
- **Avec 10 % de perte** : 1760 carreaux ✓

d) **Volume du cylindre creusé** : $\pi \times 1,5^2 \times 2$ ✓

- **Calcul** : $\pi \times 2,25 \times 2 = 4,5\pi \approx 14,137 \text{ m}^3$ ✓
- **Nouveau volume total** :

$$144 + 14,137 \approx 158,14 \text{ m}^3$$

- **En litres** : environ 158 140 L ✓
- **Augmentation** : $\frac{14,137}{144} \approx 9,8\%$ ✓
- **Nouvelle surface à carreler** : on retire le disque du fond et on ajoute la paroi et le fond de la fosse ✓
- **Disque retiré** : $\pi \times 2,25 \approx 7,069 \text{ m}^2$ ✓
- **Paroi cylindrique ajoutée** : $2\pi \times 1,5 \times 2 = 6\pi \approx 18,850 \text{ m}^2$ ✓
- **Fond de la fosse ajouté** : $\pi \times 2,25 \approx 7,069 \text{ m}^2$ ✓
- **Bilan** : $144 - 7,069 + 18,850 + 7,069 = 162,85 \text{ m}^2$ ✓
- **Simplification** : le disque retiré et le fond ajouté se compensent, il suffit d'ajouter la paroi ✓
- **Contrôle** : $144 + 18,850 = 162,85 \text{ m}^2$ ✓
- **Nouveau coût de carrelage** : $162,85 \times 45 \approx 7328 \text{ €}$ ✓
- **Surcoût** : environ 848 € ✓

Réponse. a) 144 m^3 soit 144 000 L · b) $122,4 \text{ m}^3$ · c) 144 m^2 · d) $\approx 158,14 \text{ m}^3$ (et $162,85 \text{ m}^2$ à carreler).