

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : conception, stockage et optimisation

Géométrie dans l'espace — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Volumes et aires de référence.

Solide	Volume	Aire
pavé $a \times b \times c$	abc	$2(ab + ac + bc)$
cube d'arête a	a^3	$6a^2$
cylindre	$\pi r^2 h$	$2\pi r^2 + 2\pi r h$
cône	$\frac{\pi r^2 h}{3}$	$\pi r^2 + \pi r g$
pyramide	$\frac{A_{\text{base}} \times h}{3}$	base + faces
boule	$\frac{4\pi R^3}{3}$	$4\pi R^2$
prisme droit	$A_{\text{base}} \times h$	$2A_{\text{base}} + Ph$

Unités de volume et de capacité.

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ L} \quad 1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL} \quad 1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$$

Conversion d'aires. $1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2$, $1 \text{ ha} = 10^4 \text{ m}^2$, $1 \text{ km}^2 = 10^6 \text{ m}^2$.

Méthode pour un problème de remplissage. On calcule le volume disponible, le volume d'un élément, puis on **divise** — en arrondissant à l'entier **inférieur**, car un élément partiel ne compte pas. Attention : en pratique, l'empilement laisse des vides, le résultat théorique est donc un **majorant**.

Optimiser une forme. À volume fixé, la forme qui minimise la surface est la **sphère**, puis le cylindre de hauteur égale au diamètre, puis le cube. C'est pourquoi les bulles sont rondes et les conserves presque cubiques en proportions.

Deux réflexes pour conclure.

- Vérifier l'**ordre de grandeur** : un aquarium de 200 m^3 ou une boîte de 3 mm^3 doivent alerter.
- Revenir à l'**unité de l'énoncé** : une réponse en cm^3 quand on demande des litres est incomplète.

Correction de l'exercice 1 - Dimensionner une citerne

- **Conversion du volume** : $5000 \text{ L} = 5\,000\,000 \text{ cm}^3$ ✓
- **Formule** : $V = \pi r^2 h$ ✓
- **Équation** : $\pi \times 6400 \times h = 5\,000\,000$ ✓
- **Résolution** : $h = \frac{5\,000\,000}{6400\pi}$ ✓
- **Calcul** :

$$h \approx 248,68 \text{ cm, soit environ } 2,49 \text{ m}$$

- **Contrôle** : $\pi \times 6400 \times 248,68 \approx 5\,000\,000 \text{ cm}^3 \checkmark$
- **Aire des deux disques** : $2\pi \times 6400 = 12\,800\pi \approx 40\,212,39 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Aire latérale** : $2\pi \times 80 \times 248,68 \approx 125\,000 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Contrôle exact** : $2\pi rh = \frac{2 \times 5\,000\,000}{80} = 125\,000 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Justification** : $2\pi rh = \frac{2V}{r}$, formule bien commode $\checkmark$
- **Aire totale** :

$$\approx 40\,212 + 125\,000 = 165\,212 \text{ cm}^2 \approx 16,52 \text{ m}^2$$
- **Coût de la tôle à 28 €/m²** : environ 462,60 € $\checkmark$
- **Comparaison avec la citerne optimale** : elle vérifierait $h = 2r \checkmark$
- **Rayon optimal** : $2\pi r^3 = 5\,000\,000$, donc $r^3 \approx 795\,775$ et $r \approx 92,6 \text{ cm} \checkmark$
- **Hauteur** : $\approx 185,2 \text{ cm} \checkmark$
- **Aire totale optimale** : $6\pi r^2 \approx 6\pi \times 8575 \approx 161\,600 \text{ cm}^2$, soit $16,16 \text{ m}^2 \checkmark$
- **Économie** : environ 2,2 % de tôle $\checkmark$

Réponse. $h \approx 248,68 \text{ cm}$ (environ 2,49 m), pour $\approx 16,52 \text{ m}^2$ de tôle.

Correction de l'exercice 2 - Remplir un carton de boîtes

- **Volume du carton** : $60 \times 40 \times 30 = 72\,000 \text{ cm}^3 \checkmark$
- **Volume d'une boîte de 10 cm** : $1000 \text{ cm}^3 \checkmark$
- **Quotient théorique** : $\frac{72\,000}{1000} = 72 \checkmark$
- **Vérification par rangées** : $\frac{60}{10} = 6$, $\frac{40}{10} = 4$ et $\frac{30}{10} = 3 \checkmark$
- **Comptage** : $6 \times 4 \times 3 = 72$ boîtes $\checkmark$
- **Conclusion** : les 10 cm divisent exactement les trois dimensions, le remplissage est parfait $\checkmark$
- **Pour des boîtes de 12 cm** : volume $1728 \text{ cm}^3 \checkmark$
- **Quotient théorique** : $\frac{72\,000}{1728} \approx 41,67 \checkmark$
- **Mais** : ce quotient est un **majorant**, il faut compter par rangées $\checkmark$
- **Comptage** : $\frac{60}{12} = 5 \checkmark$
- **Puis** : $\frac{40}{12} \approx 3,33$, donc 3 rangées $\checkmark$
- **Puis** : $\frac{30}{12} = 2,5$, donc 2 rangées $\checkmark$
- **Nombre de boîtes** :

$$5 \times 3 \times 2 = 30 \text{ boîtes}$$
- **Volume occupé** : $30 \times 1728 = 51\,840 \text{ cm}^3 \checkmark$
- **Taux de remplissage** : $\frac{51\,840}{72\,000} = 72 \% \checkmark$
- **Espace perdu** : $20\,160 \text{ cm}^3 \checkmark$
- **Leçon** : l'écart au quotient théorique (41,67 contre 30) montre qu'il ne faut **jamais** se contenter de diviser les volumes $\checkmark$

Réponse. 72 boîtes de 10 cm (remplissage parfait) mais seulement 30 boîtes de 12 cm (72 % du volume).

Correction de l'exercice 3 - Comparer trois formes

- **Cube** : arête $\sqrt[3]{1000} = 10$ cm ✓
- **Aire** : $6 \times 100 = 600$ cm² ✓
- **Cylindre avec** $h = 2r$: $V = \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$ ✓
- **Équation** : $2\pi r^3 = 1000$, donc $r^3 = \frac{500}{\pi} \approx 159,155$ ✓
- **Rayon** : $r \approx 5,419$ cm ✓
- **Hauteur** : $\approx 10,839$ cm ✓
- **Aire totale** : $6\pi r^2 \approx 6\pi \times 29,37 \approx 553,58$ cm² ✓
- **Boule** : $\frac{4\pi R^3}{3} = 1000$, donc $R^3 = \frac{750}{\pi} \approx 238,732$ ✓
- **Rayon** : $R \approx 6,204$ cm ✓
- **Aire** : $4\pi R^2 \approx 4\pi \times 38,49 \approx 483,60$ cm² ✓
- **Classement** :

$$483,60 \text{ (boule)} < 553,58 \text{ (cylindre)} < 600 \text{ (cube)}$$
- **Conclusion** : la **boule** est la forme la plus économe en surface ✓
- **Écart boule-cube** : $\frac{600 - 483,60}{600} \approx 19,4\%$ ✓
- **Écart cylindre-cube** : $\frac{600 - 553,58}{600} \approx 7,7\%$ ✓
- **Interprétation physique** : c'est pourquoi une bulle de savon est **sphérique** ✓
- **Interprétation industrielle** : les boîtes de conserve sont cylindriques car la sphère ne s'empile pas ✓
- **Contrôle du cylindre optimal** : sa hauteur égale bien son diamètre, $10,839 \approx 2 \times 5,419$ ✓

Réponse. Boule $\approx 483,60$ cm² < cylindre $\approx 553,58$ cm² < cube 600 cm².

Correction de l'exercice 4 - Vider une piscine

- **Rayon** : 2,5 m ✓
- **Volume d'eau** : $\pi \times 6,25 \times 1,2$ ✓
- **Calcul** :

$$V = 7,5\pi \approx 23,562 \text{ m}^3$$
- **Conversion en litres** : 23 562 L ✓
- **Débit** : 250 L/min ✓
- **Durée** :

$$t = \frac{23\,562}{250} \approx 94,25 \text{ min}$$
- **Conversion** : environ 1 h 34 min ✓
- **Contrôle** : $94,25 \times 250 \approx 23\,562$ L ✓
- **Débit horaire** : $250 \times 60 = 15\,000$ L/h, soit 15 m³/h ✓
- **Contrôle de la durée** : $\frac{23,562}{15} \approx 1,571$ h, soit 1 h 34 min ✓
- **Cohérence** : les deux calculs concordent ✓
- **Avec une pompe deux fois plus puissante** : environ 47 min ✓
- **Si la profondeur était de 1,50 m** : $V = 9,375\pi \approx 29,452$ m³ ✓
- **Durée** : $\approx 117,8$ min, soit 1 h 58 min ✓

- **Rapport** : $\frac{1,5}{1,2} = 1,25$, et $\frac{117,8}{94,25} = 1,25$ ✓
- **Cohérence** : la durée est **proportionnelle** à la profondeur ✓
- **Attention pratique** : le débit réel d'une pompe baisse quand le niveau descend, la durée réelle est donc plus longue ✓

Réponse. $V = 7,5\pi \approx 23,56 \text{ m}^3$, soit environ 94,25 min (1 h 34 min).

Correction de l'exercice 5 - Un silo

- **Rayon** : 2 m ✓
- **Volume du cylindre** : $\pi \times 4 \times 9 = 36\pi \approx 113,097 \text{ m}^3$ ✓
- **Volume du cône** : $\frac{\pi \times 4 \times 3}{3} = 4\pi \approx 12,566 \text{ m}^3$ ✓
- **Volume total** :

$$V = 36\pi + 4\pi = 40\pi \approx 125,664 \text{ m}^3$$
- **Masse de grain** : $125,664 \times 0,75$ ✓
- **Calcul** :

$$m \approx 94,25 \text{ tonnes}$$
- **Contrôle** : $\frac{94,25}{0,75} \approx 125,66 \text{ m}^3$ ✓
- **Part du cône** : $\frac{4}{40} = 10\%$ ✓
- **Part du cylindre** : 90 % ✓
- **Remarque** : le cône, haut d'un tiers du cylindre, n'apporte qu'un dixième du volume ✓
- **Explication** : le volume d'un cône est le tiers de celui du cylindre de mêmes dimensions ✓
- **Contrôle** : un cylindre de 3 m de haut ferait 12π , et le cône en fait le tiers, soit 4π ✓
- **Génératrice du cône** : $\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3,606 \text{ m}$ ✓
- **Aire latérale du cône** : $\pi \times 2 \times 3,606 \approx 22,66 \text{ m}^2$ ✓
- **Aire latérale du cylindre** : $2\pi \times 2 \times 9 = 36\pi \approx 113,10 \text{ m}^2$ ✓
- **Aire de tôle totale** (sans le fond) : $\approx 135,76 \text{ m}^2$ ✓
- **Avec le fond** : $+4\pi \approx 12,57$, soit $\approx 148,33 \text{ m}^2$ ✓

Réponse. $V = 40\pi \approx 125,66 \text{ m}^3$, soit environ 94,25 tonnes de grain.

Correction de l'exercice 6 - Fondre et remouler

- **Rapport des rayons** : $\frac{6}{1} = 6$ ✓
- **Rapport des volumes** : $6^3 = 216$ ✓
- **Nombre de billes** :

$$216 \text{ billes}$$
- **Contrôle par les volumes** : la grande boule fait $\frac{4\pi \times 216}{3} = 288\pi \approx 904,78 \text{ cm}^3$ ✓
- **Une bille** : $\frac{4\pi}{3} \approx 4,189 \text{ cm}^3$ ✓
- **Quotient** : $\frac{288\pi}{4\pi/3} = 216$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
- **Aire de la grande boule** : $4\pi \times 36 = 144\pi \approx 452,39 \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire totale des 216 billes** : $216 \times 4\pi = 864\pi \approx 2714,34 \text{ cm}^2$ ✓

- **Rapport des aires** : $\frac{864}{144} = 6$ ✓
- **Interprétation** : la surface totale est multipliée par 6 ✓
- **Formule générale** : découper en billes n fois plus petites multiplie la surface par n ✓
- **Conséquence pratique** : le plomb divisé s'oxyde bien plus vite ✓
- **Application en chimie** : c'est pourquoi on broie les réactifs solides ✓
- **Si les billes faisaient 2 cm de rayon** : $3^3 = 27$ billes ✓
- **Aire totale alors** : $27 \times 4\pi \times 4 = 432\pi \approx 1357,17 \text{ cm}^2$ ✓
- **Rapport** : 3, conforme à la règle ✓

Réponse. $6^3 = 216$ billes, avec une surface totale multipliée par 6.

Correction de l'exercice 7 - Boîte de conserve optimale

- **Volume en cm^3** : 425 cm^3 ✓
- **Condition d'optimalité** : la hauteur égale le diamètre, soit $h = 2r$ ✓
- **Équation** : $2\pi r^3 = 425$ ✓
- **Calcul** : $r^3 = \frac{425}{2\pi} \approx 67,64$ ✓
- **Rayon optimal** :

$$r \approx 4,076 \text{ cm}$$
- **Diamètre optimal** : $\approx 8,15 \text{ cm}$ ✓
- **Hauteur optimale** : $\approx 8,15 \text{ cm}$ ✓
- **Aire totale optimale** : $6\pi r^2 \approx 6\pi \times 16,61 \approx 313,17 \text{ cm}^2$ ✓
- **Conserve réelle** : rayon 3,65 cm ✓
- **Hauteur** : $h = \frac{425}{\pi \times 13,3225} \approx 10,157 \text{ cm}$ ✓
- **Aire totale** : $2\pi \times 13,3225 + 2\pi \times 3,65 \times 10,157$ ✓
- **Calcul** : $83,72 + 232,97 \approx 316,69 \text{ cm}^2$ ✓
- **Comparaison** : 316,69 contre 313,17 cm^2 ✓
- **Écart** : seulement 1,1 % ✓
- **Conclusion** : la conserve réelle est **très proche** de l'optimum ✓
- **Pourquoi pas exactement optimale ?** Contraintes d'empilement, de préhension et de format d'étiquette ✓
- **Contrôle du rapport réel** : $\frac{10,157}{7,3} \approx 1,39$, contre 1 pour l'optimum ✓
- **Remarque** : la courbe de l'aire est très **plate** autour de l'optimum, d'où le faible surcoût ✓

Réponse. Optimum : rayon $\approx 4,08 \text{ cm}$ et hauteur $\approx 8,15 \text{ cm}$, pour $\approx 313,17 \text{ cm}^2$; la conserve réelle en utilise $316,69 \text{ cm}^2$, soit 1,1 % de plus.

Correction de l'exercice 8 - Remplir un cône

- **Volume total** : $\frac{\pi \times 64 \times 12}{3} = 256\pi \approx 804,25 \text{ cm}^3$ ✓
- **Remplissage à mi-hauteur** : la partie remplie est un cône réduit ✓
- **Rapport de réduction** : $k = \frac{1}{2}$ ✓
- **Rayon de la surface libre** : 4 cm ✓
- **Volume rempli** : $\frac{\pi \times 16 \times 6}{3} = 32\pi \approx 100,53 \text{ cm}^3$ ✓

— **Contrôle par le rapport** : $256\pi \times \frac{1}{8} = 32\pi \checkmark$

— **Pourcentage** :

$$\frac{32}{256} = \frac{1}{8} = 12,5 \%$$

— **Résultat frappant** : remplir la moitié de la hauteur ne donne que 12,5 % du volume $\checkmark$

— **Explication** : le cône est **pointu** en bas, le volume se concentre en haut $\checkmark$

— **Hauteur pour remplir la moitié du volume** : $k^3 = 0,5$, donc $k \approx 0,7937 \checkmark$

— **Hauteur correspondante** : $12 \times 0,7937 \approx 9,52 \text{ cm} \checkmark$

— **Contrôle** : $256\pi \times 0,5 = 128\pi$, et $\frac{\pi \times (8 \times 0,7937)^2 \times 9,52}{3} \approx 128\pi \checkmark$

— **Hauteur pour un quart du volume** : $k = \sqrt[3]{0,25} \approx 0,63$, soit $\approx 7,56 \text{ cm} \checkmark$

— **Hauteur pour les trois quarts** : $k \approx 0,9086$, soit $\approx 10,90 \text{ cm} \checkmark$

— **Lecture pratique** : les graduations d'un verre conique sont **très resserrées** en haut $\checkmark$

— **Contrôle des écarts** : de 0 à 25 % il faut 7,56 cm, de 75 à 100 % seulement 1,10 cm $\checkmark$

— **Conséquence** : un verre conique donne une impression trompeuse de quantité $\checkmark$

Réponse. Seulement $\frac{1}{8} = 12,5 \%$ de sa contenance.

Correction de l'exercice 9 - Deux récipients

— **Volume d'eau** : $15^3 = 3375 \text{ cm}^3 \checkmark$

— **Aire de base du cylindre** : $\pi \times 100 = 100\pi \approx 314,159 \text{ cm}^2 \checkmark$

— **Hauteur atteinte** : $h = \frac{V}{A} \checkmark$

— **Calcul** :

$$h = \frac{3375}{100\pi} \approx 10,743 \text{ cm}$$

— **Contrôle** : $\pi \times 100 \times 10,743 \approx 3375 \text{ cm}^3 \checkmark$

— **Contrôle de vraisemblance** : le cylindre est plus large que le cube, l'eau monte donc moins haut $\checkmark$

— **Comparaison des aires de base** : 225 cm^2 pour le cube contre $314,16 \text{ cm}^2 \checkmark$

— **Rapport** : $\frac{225}{314,16} \approx 0,716 \checkmark$

— **Contrôle** : $15 \times 0,716 \approx 10,74 \text{ cm} \checkmark$

— **Cohérence** : la hauteur baisse dans le rapport des aires $\checkmark$

— **Si le cylindre avait un rayon de 8 cm** : base $64\pi \approx 201,06 \text{ cm}^2 \checkmark$

— **Hauteur** : $\frac{3375}{201,06} \approx 16,79 \text{ cm} \checkmark$

— **Rayon pour que l'eau atteigne exactement 15 cm** : $\pi r^2 \times 15 = 3375 \checkmark$

— **Calcul** : $r^2 = \frac{225}{\pi} \approx 71,62$, donc $r \approx 8,46 \text{ cm} \checkmark$

— **Interprétation** : c'est le rayon du cylindre de même aire de base que le cube $\checkmark$

— **Contrôle** : $\pi \times 71,62 \approx 225 \text{ cm}^2 \checkmark$

— **Diamètre correspondant** : $\approx 16,93 \text{ cm}$, un peu plus que le côté 15 cm $\checkmark$

Réponse. $h = \frac{3375}{100\pi} \approx 10,74 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 10 - Un aquarium à concevoir

- **Volume en cm^3** : $240 \text{ L} = 240\,000 \text{ cm}^3$ ✓
 - **Notation** : ℓ la largeur, donc 2ℓ la longueur ✓
 - **Équation** : $2\ell \times \ell \times 50 = 240\,000$ ✓
 - **Simplification** : $100\ell^2 = 240\,000$ ✓
 - **Résolution** : $\ell^2 = 2400$, donc $\ell = \sqrt{2400} = 20\sqrt{6} \approx 48,990 \text{ cm}$ ✓
 - **Longueur** : $40\sqrt{6} \approx 97,980 \text{ cm}$ ✓
 - **Dimensions** :

$$\approx 97,98 \times 48,99 \times 50 \text{ cm}$$
 - **Contrôle du volume** : $97,98 \times 48,99 \times 50 \approx 240\,000 \text{ cm}^3$ ✓
 - **Aire du fond** : $97,98 \times 48,99 \approx 4800 \text{ cm}^2$ ✓
 - **Contrôle exact** : $2\ell^2 = 4800 \text{ cm}^2$ ✓
 - **Deux grandes parois** : $2 \times 97,98 \times 50 \approx 9798 \text{ cm}^2$ ✓
 - **Deux petites parois** : $2 \times 48,99 \times 50 \approx 4899 \text{ cm}^2$ ✓
 - **Surface de verre** :

$$\approx 4800 + 9798 + 4899 = 19\,497 \text{ cm}^2 \approx 1,95 \text{ m}^2$$
 - **Coût du verre à 60 €/m²** : environ 117 € ✓
 - **Masse de l'eau** : 240 kg ✓
 - **Remarque de sécurité** : avec le verre et le décor, l'ensemble dépasse 280 kg — le meuble support doit être dimensionné en conséquence ✓
 - **Pression au fond** : environ 0,05 bar, soit 5000 Pa ✓
- Réponse.** $\approx 97,98 \times 48,99 \times 50 \text{ cm}$, soit $\approx 1,95 \text{ m}^2$ de verre.

Correction de l'exercice 11 - Empiler des sphères

- **Nombre par rangée** : $\frac{20}{4} = 5$ ✓
- **Nombre total** :

$$5^3 = 125 \text{ balles}$$
- **Volume d'une balle** : $\frac{4\pi \times 8}{3} = \frac{32\pi}{3} \approx 33,510 \text{ cm}^3$ ✓
- **Volume total des balles** : $125 \times 33,510 \approx 4188,79 \text{ cm}^3$ ✓
- **Contrôle exact** : $125 \times \frac{32\pi}{3} = \frac{4000\pi}{3}$ ✓
- **Volume de la boîte** : 8000 cm^3 ✓
- **Pourcentage occupé** :

$$\frac{4188,79}{8000} \approx 52,36 \%$$
- **Valeur exacte** : $\frac{4000\pi/3}{8000} = \frac{\pi}{6} \approx 0,5236$ ✓
- **Reconnaissance** : c'est le même rapport que pour une boule inscrite dans un cube ✓
- **Explication** : chaque balle est inscrite dans un petit cube de 4 cm d'arête ✓
- **Contrôle** : $\frac{33,510}{64} \approx 0,5236$ ✓
- **Espace vide** : $8000 - 4188,79 = 3811,21 \text{ cm}^3$, soit 47,64 % ✓
- **Empilement plus dense** : en décalant les couches, on atteint environ 74 % ✓
- **Nom de cet arrangement** : l'empilement **compact**, ou conjecture de Kepler ✓

- **Contrôle** : $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0,7405$ ✓
- **Gain potentiel** : passer de 52,4 à 74,0 %, soit 41 % de balles en plus ✓
- **Contrôle** : $\frac{0,7405}{0,5236} \approx 1,414$ ✓

Réponse. 125 balles, occupant $\frac{\pi}{6} \approx 52,36$ % du volume.

Correction de l'exercice 12 - Comparer deux emballages

- **Volume du cube** : 1728 cm^3 ✓
- **Volume du cylindre** : $\pi \times 36 \times 12 = 432\pi \approx 1357,17 \text{ cm}^3$ ✓
- **Rapport** : $\frac{1357,17}{1728} \approx 78,54$ % ✓
- **Valeur exacte** : $\frac{432\pi}{1728} = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854$ ✓
- **Interprétation** : le cylindre inscrit dans le cube en occupe $\frac{\pi}{4}$ ✓
- **Aire du cube** : $6 \times 144 = 864 \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire du cylindre** : $2\pi \times 36 + 2\pi \times 6 \times 12 = 72\pi + 144\pi = 216\pi \approx 678,58 \text{ cm}^2$ ✓
- **Rapport des aires** : $\frac{678,58}{864} \approx 78,54$ % ✓
- **Coïncidence remarquable** : le **même** rapport $\frac{\pi}{4}$ ✓
- **Surface par litre pour le cube** : $\frac{864}{1,728} = 500 \text{ cm}^2/\text{L}$ ✓
- **Pour le cylindre** : $\frac{678,58}{1,35717} = 500 \text{ cm}^2/\text{L}$ ✓
- **Conclusion** : les deux sont **équivalents** en efficacité matière ✓
- **Explication** : les deux formes ont le même rapport surface/volume, $\frac{864}{1728} = \frac{1}{2} \text{ cm}^{-1}$ ✓
- **Contrôle pour le cylindre** : $\frac{216\pi}{432\pi} = \frac{1}{2}$ ✓
- **Conséquence commerciale** : le cylindre contient 21,5 % de moins pour le même encombrement ✓
- **Avantage du cube** : il s'empile sans perte ✓
- **Avantage du cylindre** : il résiste mieux à la pression interne ✓

Réponse. Le cylindre fait $\frac{\pi}{4} \approx 78,54$ % du volume **et** de la surface du cube : même efficacité matière ($500 \text{ cm}^2/\text{L}$).

Correction de l'exercice 13 - Une serre

- **Surface au sol** : un rectangle de 6 m par 10 m ✓
- **Calcul** : 60 m^2 ✓
- **Volume** : la moitié d'un cylindre ✓
- **Calcul** :

$$V = \frac{\pi \times 9 \times 10}{2} = 45\pi \approx 141,372 \text{ m}^3$$

- **Bâche — partie cylindrique** : la moitié de l'aire latérale d'un cylindre ✓
- **Calcul** : $\frac{2\pi \times 3 \times 10}{2} = 30\pi \approx 94,248 \text{ m}^2$ ✓
- **Bâche — deux pignons** : deux demi-disques, soit un disque entier ✓
- **Calcul** : $\pi \times 9 = 9\pi \approx 28,274 \text{ m}^2$ ✓
- **Surface de bâche totale** :

$$30\pi + 9\pi = 39\pi \approx 122,522 \text{ m}^2$$

- **Coût à 6 €/m²** : environ 735 € ✓
- **Hauteur maximale** : 3 m, au centre ✓
- **Hauteur à 1,50 m de l'axe** : $\sqrt{9 - 2,25} = \sqrt{6,75} \approx 2,598 \text{ m}$ ✓
- **Hauteur à 2,50 m** : $\sqrt{9 - 6,25} = \sqrt{2,75} \approx 1,658 \text{ m}$ ✓
- **Surface utilisable sous 2 m de hauteur** : il faut $\sqrt{9 - x^2} \geq 2$, soit $x^2 \leq 5$ ✓
- **Donc** : $|x| \leq \sqrt{5} \approx 2,236 \text{ m}$, soit une largeur utile de 4,472 m ✓
- **Surface utile** : $4,472 \times 10 \approx 44,72 \text{ m}^2$ ✓
- **Part du sol** : $\frac{44,72}{60} \approx 74,5 \%$ ✓
- **Volume par mètre carré de sol** : $\frac{141,372}{60} \approx 2,356 \text{ m}^3/\text{m}^2$ ✓

Réponse. $V = 45\pi \approx 141,37 \text{ m}^3$, bâche $39\pi \approx 122,52 \text{ m}^2$, sol 60 m^2 .

Correction de l'exercice 14 - Poids d'une structure

- **Rayon extérieur** : 5 cm ✓
- **Rayon intérieur** : $5 - 0,5 = 4,5 \text{ cm}$ ✓
- **Longueur en cm** : 600 cm ✓
- **Aire de la section extérieure** : $\pi \times 25 = 25\pi \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire de la section intérieure** : $\pi \times 20,25 = 20,25\pi \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire de la couronne** : $\pi(25 - 20,25) = 4,75\pi \approx 14,923 \text{ cm}^2$ ✓
- **Volume d'acier** :

$$V = 14,923 \times 600 \approx 8953,54 \text{ cm}^3$$

- **Contrôle exact** : $4,75\pi \times 600 = 2850\pi \approx 8953,54 \text{ cm}^3$ ✓
- **Masse** : $8953,54 \times 7,85$ ✓
- **Calcul** :

$$m \approx 70\,285 \text{ g} \approx 70,29 \text{ kg}$$

- **Contrôle de vraisemblance** : un tube d'acier de 6 m pesant 70 kg est réaliste ✓
- **Masse au mètre** : $\approx 11,71 \text{ kg/m}$ ✓
- **Si le tube était plein** : volume $25\pi \times 600 = 15\,000\pi \approx 47\,124 \text{ cm}^3$ ✓
- **Masse** : $\approx 369,9 \text{ kg}$ ✓
- **Rapport** : $\frac{70,29}{369,9} \approx 19 \%$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{4,75}{25} = 19 \%$ ✓
- **Intérêt du tube** : il ne pèse que 19 % du plein tout en gardant l'essentiel de sa résistance à la flexion ✓
- **Explication mécanique** : la matière éloignée de l'axe travaille le plus, celle du centre presque pas ✓

Réponse. $V = 2850\pi \approx 8953,54 \text{ cm}^3$, soit une masse de $\approx 70,29 \text{ kg}$.

Correction de l'exercice 15 - Mètre cube d'eau

- **Relation de base** : 1 m³ d'eau pèse 1000 kg ✓
- **Pour 1 kg** : le volume est de $\frac{1}{1000} \text{ m}^3$ ✓
- **Conversion** : 1 dm³, soit 1 L ✓

— **Arête :**

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$$

— **Contrôle :** $10^3 = 1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ L}$, qui pèse bien 1 kg ✓

— **Pour 1 g :** le volume est de 1 cm^3 ✓

— **Arête :**

$$1 \text{ cm}$$

— **Contrôle :** 1 cm^3 d'eau pèse 1 g ✓

— **Chaîne complète :** $1 \text{ m} \rightarrow 1 \text{ t}$, $1 \text{ dm} \rightarrow 1 \text{ kg}$, $1 \text{ cm} \rightarrow 1 \text{ g}$, $1 \text{ mm} \rightarrow 1 \text{ mg}$ ✓

— **Cohérence :** diviser l'arête par 10 divise la masse par 1000 ✓

— **Arête pour 8 kg :** 8 L, donc $\sqrt[3]{8000} = 20 \text{ cm}$ ✓

— **Arête pour 100 kg :** 100 L, donc $\sqrt[3]{100\,000} \approx 46,42 \text{ cm}$ ✓

— **Contrôle :** $46,42^3 \approx 100\,038 \text{ cm}^3$ ✓

— **Arête pour 500 g :** 500 cm^3 , donc $\sqrt[3]{500} \approx 7,94 \text{ cm}$ ✓

— **Remarque historique :** le kilogramme a été défini en 1795 comme la masse d'un décimètre cube d'eau ✓

— **Utilité pratique :** cette correspondance permet d'estimer une masse d'eau de tête ✓

— **Exemple :** une baignoire de 150 L d'eau pèse 150 kg ✓

Réponse. 10 cm d'arête pour 1 kg (1 L), et 1 cm pour 1 g (1 cm^3).

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un château d'eau

a) **Rayon :** 4 m ✓

— **Volume du cylindre :** $\pi \times 16 \times 6 = 96\pi \approx 301,593 \text{ m}^3$ ✓

— **Volume du cône :** $\frac{\pi \times 16 \times 4}{3} = \frac{64\pi}{3} \approx 67,021 \text{ m}^3$ ✓

— **Capacité totale :**

$$V = 96\pi + \frac{64\pi}{3} = \frac{352\pi}{3} \approx 368,614 \text{ m}^3$$

— **En litres :** environ 368 614 L ✓

— **Part du cône :** $\frac{64/3}{352/3} = \frac{64}{352} \approx 18,2\%$ ✓

b) **Aire latérale du cylindre :** $2\pi \times 4 \times 6 = 48\pi \approx 150,796 \text{ m}^2$ ✓

— **Génératrice du cône :** $\sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5,657 \text{ m}$ ✓

— **Aire latérale du cône :** $\pi \times 4 \times 4\sqrt{2} = 16\pi\sqrt{2} \approx 71,086 \text{ m}^2$ ✓

— **Couvercle :** $\pi \times 16 = 16\pi \approx 50,265 \text{ m}^2$ ✓

— **Surface extérieure totale :**

$$\approx 150,796 + 71,086 + 50,265 = 272,15 \text{ m}^2$$

— **Coût de peinture à 18 €/m² :** environ 4899 € ✓

— **Rapport surface/volume :** $\frac{272,15}{368,614} \approx 0,738 \text{ m}^{-1}$ ✓

c) **Autonomie :** $\frac{368,614}{180}$ ✓

— **Calcul :**

$$\approx 2,048 \text{ jours}$$

— **Conversion :** environ 2 jours et 1 heure ✓

— **Contrôle :** $2,048 \times 180 \approx 368,6 \text{ m}^3$ ✓

- **Lecture** : l'autonomie est courte, le château d'eau sert surtout de **tampon** journalier ✓
- **Rôle réel** : lisser les pointes de consommation et maintenir la pression ✓
- **Consommation horaire moyenne** : $\frac{180}{24} = 7,5 \text{ m}^3/\text{h}$ ✓
- **Temps pour vider en pointe** (débit triple) : $\frac{368,614}{22,5} \approx 16,4 \text{ h}$ ✓

d) **Rapport des volumes** : 2 ✓

- **Rapport des longueurs** : $k = \sqrt[3]{2} \approx 1,2599$ ✓
- **Nouveau diamètre** : $8 \times 1,2599 \approx 10,079 \text{ m}$ ✓
- **Nouvelle hauteur du cylindre** : $6 \times 1,2599 \approx 7,559 \text{ m}$ ✓
- **Nouvelle hauteur du cône** : $4 \times 1,2599 \approx 5,040 \text{ m}$ ✓
- **Contrôle du volume** : $\frac{352\pi}{3} \times 2 = \frac{704\pi}{3} \approx 737,23 \text{ m}^3$ ✓
- **Contrôle direct** : rayon $\approx 5,040 \text{ m}$, donc
 $\pi \times 25,40 \times 7,559 + \frac{\pi \times 25,40 \times 5,040}{3} \approx 603,2 + 134,0 = 737,2 \text{ m}^3$ ✓
- **Cohérence** : les deux calculs concordent ✓
- **Rapport des surfaces** : $k^2 \approx 1,5874$ ✓
- **Nouvelle surface** : $272,15 \times 1,5874 \approx 432,01 \text{ m}^2$ ✓
- **Augmentation de peinture** : 58,7 % pour une capacité doublée ✓
- **Nouvelle autonomie** : $\frac{737,23}{180} \approx 4,10 \text{ jours}$ ✓
- **Cohérence** : c'est bien le double de 2,048 jours ✓

Réponse. a) $\frac{352\pi}{3} \approx 368,61 \text{ m}^3$ soit $\approx 368\,614 \text{ L}$ · b) $\approx 272,15 \text{ m}^2$ · c) environ 2,05 jours ·
 d) diamètre $\approx 10,08 \text{ m}$, hauteurs $\approx 7,56 \text{ m}$ et $\approx 5,04 \text{ m}$.