

Plaquette 1 - Volumes, sections et positions relatives

Géométrie dans l'espace — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour la géométrie dans l'espace.

- Pavé droit de dimensions L, ℓ, h : $V = L \times \ell \times h$ et aire totale $A = 2(L\ell + Lh + \ell h)$.
- Cube d'arête a : $V = a^3$.
- Cylindre de rayon r et de hauteur h : $V = \pi r^2 h$.
- Cône et pyramide : $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B est l'aire de la base.
- Boule de rayon r : $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.
- Diagonale d'un pavé de dimensions L, ℓ, h : $d = \sqrt{L^2 + \ell^2 + h^2}$ (deux applications de Pythagore).
- **Positions relatives** : deux droites de l'espace peuvent être coplanaires (sécantes ou parallèles) ou **non coplanaires** ; deux plans sont parallèles ou sécants suivant une droite.
- **Agrandissement-réduction** de rapport k : les longueurs sont multipliées par k , les aires par k^2 , les volumes par k^3 .
- Conversions : $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$, donc $1\,000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ L}$.

Correction de l'exercice 1 - Volume et aire d'un pavé droit

On applique les deux formules du cours.

- Volume : $V = 5 \times 3 \times 2 = 30 \text{ cm}^3$.
- Aire totale : les faces sont deux à deux identiques, donc

$$A = 2(5 \times 3 + 5 \times 2 + 3 \times 2) = 2(15 + 10 + 6) = 2 \times 31 = 62 \text{ cm}^2$$

- Attention aux unités : un volume s'exprime en cm^3 , une aire en cm^2 .

Réponse. $V = 30 \text{ cm}^3$ et $A = 62 \text{ cm}^2$.

Correction de l'exercice 2 - Doubler l'arête d'un cube

- a) Formule du cours : $V = a^3 = 4^3 = 64 \text{ cm}^3$.
- b) La nouvelle arête vaut 8 cm, donc le nouveau volume est $8^3 = 512 \text{ cm}^3$.
- Rapport : $\frac{512}{64} = 8$.
- C'est la règle générale de l'agrandissement de rapport $k = 2$: les volumes sont multipliés par $k^3 = 2^3 = 8$.

Piège classique. Doubler les dimensions ne double pas le volume : il est multiplié par 8.

Réponse. a) 64 cm^3 · b) volume $\times 8$ (soit 512 cm^3).

Correction de l'exercice 3 - Volume d'un cylindre

Formule du cours : $V = \pi r^2 h$.

- Aire de la base : $\pi \times 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$.

- Volume : $V = 9\pi \times 10 = 90\pi \text{ cm}^3$ (valeur **exacte**).
- Valeur approchée : $90 \times 3,141\,59... \approx 282,7 \text{ cm}^3$.
- On donne toujours la valeur exacte avec π avant d'arrondir.

Réponse. $V = 90\pi \approx 282,7 \text{ cm}^3$.

Correction de l'exercice 4 - Volume d'un cône et d'une boule

- a) Formule : $V = \frac{1}{3}Bh$ avec $B = \pi r^2$.
- $B = \pi \times 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2$.
 - $V = \frac{1}{3} \times 25\pi \times 12 = 100\pi \approx 314,2 \text{ cm}^3$.

- b) Formule : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
- $r^3 = 6^3 = 216$.
 - $V = \frac{4}{3}\pi \times 216 = 288\pi \approx 904,8 \text{ cm}^3$.

Réponse. a) $100\pi \approx 314,2 \text{ cm}^3$ · b) $288\pi \approx 904,8 \text{ cm}^3$.

Correction de l'exercice 5 - Volume d'une pyramide

- Aire de la base : $B = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$.
- Volume de la pyramide : $V = \frac{1}{3} \times 36 \times 9 = \frac{324}{3} = 108 \text{ cm}^3$.
- Volume du pavé de même base et même hauteur : $36 \times 9 = 324 \text{ cm}^3$.
- Le rapport vaut $\frac{108}{324} = \frac{1}{3}$: la pyramide occupe exactement le **tiers** du pavé. C'est le sens du facteur $\frac{1}{3}$ de la formule.

Réponse. $V = 108 \text{ cm}^3$, soit le tiers du pavé (324 cm^3).

Correction de l'exercice 6 - Positions relatives dans un pavé

- a) $ABFE$ est un rectangle, donc (AB) et (EF) sont **parallèles** (elles sont coplanaires dans le plan (ABF)).
- b) (AB) est dans le plan du bas, (CG) est verticale et ne rencontre pas (AB) : il n'existe aucun plan contenant les deux. Elles sont **non coplanaires**.
- c) Les plans (ABC) et (EFG) sont les deux faces horizontales opposées : ils sont **parallèles** (ils n'ont aucun point commun).
- d) Les plans (ABC) et (ABF) ont en commun les points A et B : ils sont **sécants**, et leur intersection est la droite (AB) .

À retenir. Dans l'espace, deux droites qui ne se coupent pas ne sont pas forcément parallèles : elles peuvent être non coplanaires.

Réponse. a) parallèles · b) non coplanaires · c) parallèles · d) sécants suivant (AB) .

Correction de l'exercice 7 - Sections planes

- a) La section est un **rectangle**, identique à la face à laquelle le plan est parallèle (c'est le même rectangle « translaté »).
- b) Les trois segments $[BD]$, $[DE]$ et $[EB]$ sont des diagonales de trois faces du cube : elles ont donc la **même longueur** ($a\sqrt{2}$ si a est l'arête). La section est un **triangle équilatéral**.

c) La section d'une sphère par un plan sécant est un **cercle**. Ce cercle est de rayon maximal (égal au rayon de la sphère) lorsque le plan passe par le centre : on parle alors de grand cercle.

Réponse. a) un rectangle · b) un triangle équilatéral · c) un cercle.

Correction de l'exercice 8 - Diagonale d'un pavé

On applique deux fois le théorème de Pythagore, ce qui conduit à la formule du cours

$$d = \sqrt{L^2 + \ell^2 + h^2}.$$

- Étape 1 : la diagonale de la base mesure $\sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$ cm.
- Étape 2 : la grande diagonale est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 10 cm (diagonale de la base) et 5 cm (hauteur) :

$$d = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \text{ cm}$$

- Valeur approchée : $5\sqrt{5} \approx 11,2$ cm.
- Contrôle avec la formule directe : $\sqrt{64 + 36 + 25} = \sqrt{125}$. Même résultat.

Réponse. $d = 5\sqrt{5} \approx 11,2$ cm.

Correction de l'exercice 9 - Problème : remplir un aquarium

a) Volume en cm^3 : $80 \times 40 \times 50 = 160\,000 \text{ cm}^3$.

- Conversion : $1\,000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ L}$, donc

$$V = \frac{160\,000}{1\,000} = 160 \text{ L}$$

b) Remplir jusqu'à 90 % de la **hauteur** revient à un pavé de hauteur $0,9 \times 50 = 45$ cm.

- Volume d'eau : $80 \times 40 \times 45 = 144\,000 \text{ cm}^3$, soit 144 L.
- On pouvait aussi remarquer que le volume est proportionnel à la hauteur : $0,9 \times 160 = 144$ L.

Réponse. a) 160 L · b) 144 L.

Correction de l'exercice 10 - Agrandissement d'un solide

a) Le rapport est $k = \frac{5}{3}$.

b) Règles du cours : les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3 .

- Aires : $k^2 = \frac{25}{9} \approx 2,78$.
- Volumes : $k^3 = \frac{125}{27} \approx 4,63$.

c) Calcul direct : $3^3 = 27 \text{ cm}^3$ et $5^3 = 125 \text{ cm}^3$.

- Rapport : $\frac{125}{27}$, ce qui correspond exactement à k^3 . La règle est confirmée.

Réponse. a) $k = \frac{5}{3}$ · b) aires $\times \frac{25}{9}$, volumes $\times \frac{125}{27}$ · c) 27 cm^3 et 125 cm^3 .

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : cône contenu dans un cylindre

a) Cylindre : $V_1 = \pi r^2 h = \pi \times 16 \times 9 = 144\pi \text{ cm}^3$.

- Cône : $V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{144\pi}{3} = 48\pi \text{ cm}^3$.

b) Volume restant : $144\pi - 48\pi = 96\pi \text{ cm}^3$, soit environ $301,6 \text{ cm}^3$.

c) Pourcentage occupé par le cône :

$$\frac{48\pi}{144\pi} = \frac{1}{3} \approx 33,3 \%$$

— Le résultat ne dépend ni du rayon ni de la hauteur : un cône occupe toujours le tiers du cylindre de même base et même hauteur.

Réponse. a) 144π et $48\pi \text{ cm}^3$ · b) $96\pi \approx 301,6 \text{ cm}^3$ · c) $\frac{1}{3} \approx 33,3 \%$.