

Plaquette 4 - Aires, périmètres et configurations dans le repère

Géométrie repérée — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Aire d'un triangle par le déterminant.

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \right| = \frac{1}{2} |x_{AB}y_{AC} - x_{AC}y_{AB}|$$

C'est la méthode la plus rapide et la plus sûre : elle ne demande aucune racine carrée.

Aire d'un polygone par découpage. On le partage en triangles, ou on l'inscrit dans un rectangle dont on retire les triangles rectangles des coins.

Figure	Aire
triangle	$\frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur}$
parallélogramme	base $\times$ hauteur, soit la valeur absolue du déterminant
trapèze	$\frac{(b+B)}{2} \times h$
losange	$\frac{d \times D}{2}$

Hauteur d'un triangle. Connaissant l'aire et une base :

$$h = \frac{2A}{\text{base}}$$

Périmètre. On additionne les longueurs des côtés, chacune calculée par la formule de distance. Le résultat comporte en général des racines : on donne la **valeur exacte** puis l'arrondi.

Cas favorables. Un côté **horizontal** ou **vertical** simplifie tout : sa longueur est un écart de coordonnées, et la hauteur associée aussi.

Contrôle de vraisemblance. L'aire d'un triangle est toujours inférieure à celle du rectangle qui l'encadre — c'est un test rapide et efficace.

Correction de l'exercice 1 - Aire par trois méthodes

- **Côté horizontal** : $[AB]$, puisque $y_A = y_B = 1$ ✓
- **Base** : $AB = |7 - 1| = 6$ ✓
- **Hauteur issue de C** : l'écart d'ordonnées, soit $|6 - 1| = 5$ ✓
- **Aire** :

$$A = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

- **Par le déterminant** : $\overrightarrow{AB} = (6; 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (3; 5)$ ✓
- **Calcul** : $6 \times 5 - 3 \times 0 = 30$ ✓
- **Aire** : $\frac{30}{2} = 15$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓

- **Contrôle de vraisemblance** : le rectangle englobant mesure $6 \times 5 = 30$, et 15 en est la moitié ✓
- **Longueurs des autres côtés** : $AC = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \approx 5,831$ ✓
- **Puis** : $BC = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$ ✓
- **Nature** : le triangle est **isocèle en C** ✓
- **Périmètre** : $6 + 2\sqrt{34} \approx 17,662$ ✓
- **Hauteur relative à [AC]** : $\frac{2 \times 15}{\sqrt{34}} \approx 5,145$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{\sqrt{34} \times 5,145}{2} \approx 15,0$ ✓

Réponse. $A = 15$ par les deux méthodes.

Correction de l'exercice 2 - Aire d'un quadrilatère par découpage

- **Diagonale choisie** : [AC], avec $\overrightarrow{AC} = (8; 7)$ ✓
 - **Triangle ABC** : $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$ ✓
 - **Déterminant** : $6 \times 7 - 8 \times 2 = 42 - 16 = 26$ ✓
 - **Aire** : $\frac{26}{2} = 13$ ✓
 - **Triangle ACD** : $\overrightarrow{AD} = (2; 5)$ ✓
 - **Déterminant** : $8 \times 5 - 2 \times 7 = 40 - 14 = 26$ ✓
 - **Aire** : $\frac{26}{2} = 13$ ✓
 - **Aire totale** :
- $$A_{ABCD} = 13 + 13 = 26$$
- **Observation** : les deux triangles ont la **même aire** ✓
 - **Explication** : B et D sont à la même distance de la droite (AC) ✓
 - **Contrôle par l'autre diagonale** : $\overrightarrow{BD} = (-4; 3)$ ✓
 - **Triangle ABD** : $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = 30 - 4 = 26$, soit une aire de 13 ✓
 - **Triangle BCD** : $\overrightarrow{BC} = (2; 5)$ et $\overrightarrow{BD} = (-4; 3)$, de déterminant $6 + 20 = 26$, soit 13 ✓
 - **Total** : 26, identique ✓
 - **Nature du quadrilatère** : $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$ et $\overrightarrow{DC} = (6; 2)$, c'est un **parallélogramme** ✓
 - **Contrôle final** : l'aire d'un parallélogramme vaut $|\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})| = 26$ ✓

Réponse. $A = 13 + 13 = 26$ (c'est en fait un parallélogramme).

Correction de l'exercice 3 - Hauteur d'un triangle

- **Vecteur $\overrightarrow{AB}$** : $(6; -4)$ ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{AC}$** : $(4; 4)$ ✓
- **Déterminant** : $6 \times 4 - 4 \times (-4) = 24 + 16 = 40$ ✓
- **Aire** :

$$A = \frac{40}{2} = 20$$

- **Base opposée à A** : le côté [BC] ✓
- **Longueur BC** : $\sqrt{(3 - 5)^2 + (6 + 2)^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \approx 8,246$ ✓
- **Hauteur** :

$$h = \frac{2 \times 20}{2\sqrt{17}} = \frac{20}{\sqrt{17}} \approx 4,851$$

- **Contrôle** : $\frac{8,246 \times 4,851}{2} \approx 20,0$ ✓
- **Longueur** AB : $\sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7,211$ ✓
- **Longueur** AC : $\sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2} \approx 5,657$ ✓
- **Hauteur issue de** C : $\frac{40}{2\sqrt{13}} = \frac{20}{\sqrt{13}} \approx 5,547$ ✓
- **Hauteur issue de** B : $\frac{40}{4\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \approx 7,071$ ✓
- **Règle de cohérence** : la plus grande hauteur correspond au plus petit côté ✓
- **Contrôle** : le plus petit côté est $AC \approx 5,657$, et la plus grande hauteur $\approx 7,071$ ✓
- **Périmètre** : $2\sqrt{13} + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{17} \approx 21,114$ ✓

Réponse. $A = 20$ et $h = \frac{20}{\sqrt{17}} \approx 4,851$.

Correction de l'exercice 4 - Aire d'un trapèze

- **Vecteur** $\overrightarrow{AB}$: $(9; 0)$ ✓
- **Vecteur** $\overrightarrow{DC}$: $(4; 0)$ ✓
- **Déterminant** : 0, les vecteurs sont colinéaires ✓
- **Conclusion** : $(AB) \parallel (DC)$, c'est un **trapèze** ✓
- **Bases** : $AB = 9$ et $DC = 4$ ✓
- **Hauteur** : l'écart d'ordonnées, soit 5 ✓
- **Aire par la formule** :

$$A = \frac{(9 + 4) \times 5}{2} = \frac{65}{2} = 32,5$$

- **Aire par découpage** : diagonale $[AC]$ ✓
- **Triangle** ABC : base 9, hauteur 5, soit $\frac{45}{2} = 22,5$ ✓
- **Triangle** ACD : $\overrightarrow{AC} = (6; 5)$ et $\overrightarrow{AD} = (2; 5)$ ✓
- **Déterminant** : $30 - 10 = 20$, soit une aire de 10 ✓
- **Total** : $22,5 + 10 = 32,5$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
- **Longueur** AD : $\sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} \approx 5,385$ ✓
- **Longueur** BC : $\sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \approx 5,831$ ✓
- **Conclusion** : le trapèze n'est **pas isocèle** ✓
- **Périmètre** : $9 + 4 + \sqrt{29} + \sqrt{34} \approx 24,216$ ✓

Réponse. Trapèze de bases 9 et 4, de hauteur 5 : $A = 32,5$.

Correction de l'exercice 5 - Aire par soustraction

- **Rectangle englobant** : abscisses de 1 à 7, ordonnées de 2 à 8 ✓
- **Dimensions** : 6 et 6 ✓
- **Aire du rectangle** : 36 ✓
- **Coins à retirer** — trois triangles rectangles ✓
- **Premier** : sommets $(1; 2)$, $(7; 2)$, $(7; 5)$, de côtés 6 et 3 ✓
- **Aire** : $\frac{18}{2} = 9$ ✓

- **Deuxième** : sommets $(7; 5)$, $(7; 8)$, $(3; 8)$, de côtés 4 et 3 ✓
 - **Aire** : $\frac{12}{2} = 6$ ✓
 - **Troisième** : sommets $(1; 2)$, $(1; 8)$, $(3; 8)$, de côtés 2 et 6 ✓
 - **Aire** : $\frac{12}{2} = 6$ ✓
 - **Aire du triangle** :

$$36 - 9 - 6 - 6 = 15$$
 - **Contrôle par le déterminant** : $\overrightarrow{AB} = (6; 3)$ et $\overrightarrow{AC} = (2; 6)$ ✓
 - **Calcul** : $36 - 6 = 30$, soit une aire de 15 ✓
 - **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
 - **Avantage du déterminant** : deux lignes de calcul au lieu de six ✓
 - **Intérêt du découpage** : il ne demande aucune formule à retenir ✓
 - **Contrôle de vraisemblance** : $15 < 36$, l'aire est bien inférieure à celle du rectangle ✓
- Réponse.** $36 - 9 - 6 - 6 = 15$, confirmé par le déterminant.

Correction de l'exercice 6 - Triangle d'aire donnée

- **Base** : $AB = 6$, portée par l'axe des ordonnées ✓
 - **Hauteur** : la distance de C à l'axe des ordonnées, soit $|x_C|$ ✓
 - **Équation** : $\frac{6 \times |x_C|}{2} = 21$ ✓
 - **Simplification** : $3|x_C| = 21$, donc $|x_C| = 7$ ✓
 - **Solutions** :

$$C_1(7; 4) \quad \text{et} \quad C_2(-7; 4)$$
 - **Vérification pour C_1** : $\overrightarrow{AB} = (0; 6)$ et $\overrightarrow{AC_1} = (7; 4)$ ✓
 - **Déterminant** : $0 \times 4 - 7 \times 6 = -42$ ✓
 - **Aire** : $\frac{42}{2} = 21$ ✓
 - **Vérification pour C_2** : déterminant 42, aire 21 ✓
 - **Remarque** : l'ordonnée de C n'intervient **pas** dans l'aire ✓
 - **Conséquence** : tous les points de la droite $x = 7$ donnent la même aire ✓
 - **Contrôle** : $C(7; 100)$ donne aussi une aire de 21 ✓
 - **Longueurs pour C_1** : $AC_1 = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65} \approx 8,062$ ✓
 - **Puis** : $BC_1 = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53} \approx 7,280$ ✓
 - **Symétrie** : C_1 et C_2 sont symétriques par rapport à la droite (AB) ✓
 - **Lieu complet des points d'aire 21** : les deux droites $x = 7$ et $x = -7$ ✓
- Réponse.** $C_1(7; 4)$ et $C_2(-7; 4)$.

Correction de l'exercice 7 - Périmètre et valeur exacte

- **Longueur AB** : $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ ✓
- **Longueur AC** : $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ ✓
- **Longueur BC** : $\sqrt{(-3 - 4)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ ✓
- **Périmètre exact** :

$$P = 5 + 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 5\sqrt{2}$$
- **Valeur approchée** : $5\sqrt{2} \approx 7,0711$ ✓
- **Arrondi du périmètre** : 17,07 ✓

- **Nature du triangle** : $AB = AC = 5$, il est **isocèle en A** ✓
- **Test de l'angle droit en A** : $\overrightarrow{AB} = (4; 3)$ et $\overrightarrow{AC} = (-3; 4)$ ✓
- **Produit** : $4 \times (-3) + 3 \times 4 = -12 + 12 = 0$ ✓
- **Conclusion** : le triangle est **rectangle isocèle en A** ✓
- **Contrôle par Pythagore** : $25 + 25 = 50 = BC^2$ ✓
- **Aire** : $\frac{5 \times 5}{2} = 12,5$ ✓
- **Contrôle par le déterminant** : $4 \times 4 - (-3) \times 3 = 16 + 9 = 25$, soit une aire de 12,5 ✓
- **Hauteur relative à [BC]** : $\frac{2 \times 12,5}{5\sqrt{2}} = \frac{25}{5\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,536$ ✓
- **Remarque** : c'est la moitié de BC , propriété du triangle rectangle isocèle ✓
- **Contrôle** : $\frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,536$ ✓

Réponse. $P = 10 + 5\sqrt{2} \approx 17,07$ (triangle rectangle isocèle en A).

Correction de l'exercice 8 - Comparer deux aires

- **Aire du rectangle** : $8 \times 6 = 48$ ✓
 - **Triangle MNC** : $\overrightarrow{MN} = (5; 2)$ et $\overrightarrow{MC} = (5; 6)$ ✓
 - **Déterminant** : $5 \times 6 - 5 \times 2 = 30 - 10 = 20$ ✓
 - **Aire** :
- $$A_{MNC} = \frac{20}{2} = 10$$
- **Rapport** : $\frac{10}{48} \approx 0,208$, soit environ 20,8 % ✓
 - **Autre méthode** : $[NC]$ est vertical, de longueur $|6 - 2| = 4$ ✓
 - **Hauteur depuis M** : la distance à la droite $x = 8$, soit $|3 - 8| = 5$ ✓
 - **Aire** : $\frac{4 \times 5}{2} = 10$ ✓
 - **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
 - **Aire de AMD** : $\overrightarrow{AM} = (3; 0)$ et $\overrightarrow{AD} = (0; 6)$, de déterminant 18, soit 9 ✓
 - **Aire de MBN** : base $MB = 5$ et hauteur 2, soit 5 ✓
 - **Partition du rectangle en trois triangles** : AMD , DMC et MBC ✓
 - **Aire de DMC** : $\overrightarrow{DM} = (3; -6)$ et $\overrightarrow{DC} = (8; 0)$, de déterminant $0 + 48 = 48$, soit 24 ✓
 - **Aire de MBC** : base $MB = 5$ et hauteur 6, soit 15 ✓
 - **Contrôle de la partition** : $9 + 24 + 15 = 48$, l'aire du rectangle ✓
 - **Position de MNC dans cette partition** : il est **inclus** dans MBC ✓
 - **Contrôle** : $10 < 15$ ✓
 - **Aire du triangle NBC complémentaire** : $15 - 10 = 5$ ✓
 - **Contrôle direct** : base $NB = 2$ et hauteur 5, soit 5 ✓

Réponse. $A_{MNC} = 10$, soit environ 20,8 % de l'aire du rectangle (48).

Correction de l'exercice 9 - Milieu, médiane et aire

- **Milieu I** : $\left(\frac{10+4}{2}; \frac{0+9}{2}\right) = (7; 4,5)$ ✓
- **Aire de ABC** : base $AB = 10$, hauteur 9 ✓
- **Calcul** : $\frac{10 \times 9}{2} = 45$ ✓
- **Triangle ABI** : $\overrightarrow{AB} = (10; 0)$ et $\overrightarrow{AI} = (7; 4,5)$ ✓

— **Déterminant** : $10 \times 4,5 - 7 \times 0 = 45 \checkmark$

— **Aire** :

$$A_{ABI} = \frac{45}{2} = 22,5$$

— **Triangle AIC** : $\overrightarrow{AI} = (7; 4,5)$ et $\overrightarrow{AC} = (4; 9) \checkmark$

— **Déterminant** : $7 \times 9 - 4 \times 4,5 = 63 - 18 = 45 \checkmark$

— **Aire** : $\frac{45}{2} = 22,5 \checkmark$

— **Conclusion** : les deux aires sont **égales** $\checkmark$

— **Contrôle de la somme** : $22,5 + 22,5 = 45 = A_{ABC} \checkmark$

— **Explication géométrique** : $BI = IC$, et les deux triangles ont la **même hauteur** depuis A $\checkmark$

— **Généralisation** : toute médiane partage un triangle en deux aires égales $\checkmark$

— **Contrôle sur une autre médiane** : le milieu de $[AB]$ est $J = (5; 0) \checkmark$

— **Aire de AJC** : base $AJ = 5$, hauteur 9, soit 22,5 $\checkmark$

— **Aire de JBC** : base $JB = 5$, hauteur 9, soit 22,5 $\checkmark$

— **Cohérence** : même partage équitable $\checkmark$

Réponse. $A_{ABI} = A_{AIC} = 22,5$, soit la moitié des 45 du triangle.

Correction de l'exercice 10 - Aire d'un pentagone

— **Stratégie** : découper en trois triangles depuis A $\checkmark$

— **Triangle ABC** : $\overrightarrow{AB} = (6; 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (8; 4) \checkmark$

— **Déterminant** : $24 - 0 = 24$, soit une aire de 12 $\checkmark$

— **Triangle ACD** : $\overrightarrow{AC} = (8; 4)$ et $\overrightarrow{AD} = (4; 7) \checkmark$

— **Déterminant** : $56 - 16 = 40$, soit une aire de 20 $\checkmark$

— **Triangle ADE** : $\overrightarrow{AD} = (4; 7)$ et $\overrightarrow{AE} = (0; 5) \checkmark$

— **Déterminant** : $20 - 0 = 20$, soit une aire de 10 $\checkmark$

— **Aire totale** :

$$A = 12 + 20 + 10 = 42$$

— **Contrôle de vraisemblance** : le rectangle englobant mesure $8 \times 7 = 56 \checkmark$

— **Comparaison** : $42 < 56 \checkmark$

— **Proportion occupée** : $\frac{42}{56} = 75\% \checkmark$

— **Contrôle par un autre découpage, depuis C** : triangles CAB , CAE , $CED \checkmark$

— **Aire de CAB** : 12 (déjà calculée) $\checkmark$

— **Aire de CAE** : $\overrightarrow{CA} = (-8; -4)$ et $\overrightarrow{CE} = (-8; 1)$, de déterminant $-8 - 32 = -40$, soit 20 $\checkmark$

— **Aire de CED** : $\overrightarrow{CE} = (-8; 1)$ et $\overrightarrow{CD} = (-4; 3)$, de déterminant $-24 + 4 = -20$, soit 10 $\checkmark$

— **Total** : $12 + 20 + 10 = 42 \checkmark$

— **Cohérence** : les deux découpages donnent le même résultat $\checkmark$

Réponse. $A = 12 + 20 + 10 = 42$.

Correction de l'exercice 11 - Rapport d'aires et point mobile

— **Aire de ABC** : $\frac{6 \times 4}{2} = 12 \checkmark$

— **Triangle AMC** : base $AM = t$ (avec $0 \leq t \leq 6$), hauteur 4 $\checkmark$

— **Expression** :

$$A_{AMC} = \frac{4t}{2} = 2t$$

- **Contrôle par le déterminant** : $\overrightarrow{AM} = (t; 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (0; 4)$ ✓
- **Calcul** : $4t - 0 = 4t$, soit une aire de $2t$ ✓
- **Contrôle des cas extrêmes** : $t = 0$ donne 0 ✓, et $t = 6$ donne 12 ✓
- **Condition** : $2t = 6$ ✓
- **Solution** :

$$t = 3$$

- **Donc** : $M(3; 0)$, le **milieu** de $[AB]$ ✓
- **Vérification** : $A_{AMC} = 6$, et $\frac{12}{2} = 6$ ✓
- **Aire du triangle complémentaire** MBC : $12 - 6 = 6$ ✓
- **Contrôle direct** : base $MB = 3$ et hauteur 4, soit 6 ✓
- **Généralisation** : l'aire est **proportionnelle** à t ✓
- **Conséquence** : couper l'aire dans un rapport k revient à couper la base dans le même rapport ✓
- **Contrôle avec** $k = \frac{1}{3}$: $2t = 4$, donc $t = 2 = \frac{6}{3}$ ✓
- **Contrôle avec** $k = \frac{3}{4}$: $2t = 9$, donc $t = 4,5 = \frac{3 \times 6}{4}$ ✓

Réponse. $A_{AMC} = 2t$, et $t = 3$ (le milieu de $[AB]$).

Correction de l'exercice 12 - Quadrilatère croisé

- **Côtés $[AB]$ et $[CD]$** : $\overrightarrow{AB} = (6; 4)$ et $\overrightarrow{CD} = (-6; 4)$ ✓
- **Déterminant** : $6 \times 4 - (-6) \times 4 = 24 + 24 = 48 \neq 0$ ✓
- **Conclusion** : les côtés opposés ne sont pas parallèles ✓
- **Recherche d'un croisement** : les segments $[AB]$ et $[CD]$ se coupent-ils ? ✓
- **Droite (AB)** : $y = \frac{2}{3}x$ ✓
- **Droite (CD)** : pente $\frac{4-0}{0-6} = -\frac{2}{3}$, et passant par $(6; 0)$, donc $y = -\frac{2}{3}x + 4$ ✓
- **Système** : $\frac{2}{3}x = -\frac{2}{3}x + 4$ ✓
- **Résolution** : $\frac{4}{3}x = 4$, donc $x = 3$ ✓
- **Ordonnée** : $y = 2$ ✓
- **Point de croisement** : $E(3; 2)$ ✓
- **Vérification de l'appartenance aux segments** : E est entre $A(0; 0)$ et $B(6; 4)$, et entre $C(6; 0)$ et $D(0; 4)$ ✓
- **Conclusion** : le quadrilatère est bien **croisé** ✓
- **Triangle ACE** : $\overrightarrow{AC} = (6; 0)$ et $\overrightarrow{AE} = (3; 2)$, de déterminant 12, soit une aire de 6 ✓
- **Triangle BDE** : $\overrightarrow{EB} = (3; 2)$ et $\overrightarrow{ED} = (-3; 2)$, de déterminant $6 + 6 = 12$, soit une aire de 6 ✓
- **Somme des deux aires** : 12 ✓
- **Remarque** : pour un quadrilatère croisé, la formule $\frac{1}{2}|\dots|$ appliquée globalement donnerait une **différence** d'aires, ici nulle par symétrie ✓

Réponse. Croisé en $E(3; 2)$, avec deux triangles de même aire 6.

Correction de l'exercice 13 - Aire maximale

- **Base** : $AB = 8$, fixe ✓
- **Aire** : $\frac{8 \times h}{2} = 4h$, où h est la distance de C à l'axe des abscisses ✓
- **Contrainte** : C est sur le cercle, donc $(x - 4)^2 + y^2 = 16$ ✓
- **Hauteur** : $h = |y|$ ✓
- **Maximum de $|y|$** : atteint quand $(x - 4)^2 = 0$, donc $x = 4$ ✓
- **Alors** : $y^2 = 16$, soit $y = \pm 4$ ✓
- **Hauteur maximale** : 4 ✓
- **Aire maximale** :

$$A_{\max} = 4 \times 4 = 16$$

- **Points réalisant le maximum** : $(4; 4)$ et $(4; -4)$ ✓
- **Vérification** : $\overrightarrow{AB} = (8; 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (4; 4)$, de déterminant 32, soit une aire de 16 ✓
- **Remarque** : $[AB]$ est un **diamètre** du cercle ✓
- **Conséquence** : le triangle ABC est **rectangle en C** pour tout C du cercle ✓
- **Contrôle pour le maximum** : $\overrightarrow{CA} = (-4; -4)$ et $\overrightarrow{CB} = (4; -4)$, et $-16 + 16 = 0$ ✓
- **Nature du triangle maximal** : rectangle **isocèle** en C ✓
- **Aire pour $C(0; 0)$, cas dégénéré** : 0 ✓
- **Aire pour $C(2; y)$** : $y^2 = 16 - 4 = 12$, donc $h = 2\sqrt{3} \approx 3,464$ et aire $\approx 13,856$ ✓
- **Contrôle** : $13,856 < 16$ ✓

Réponse. $A_{\max} = 16$, pour $C(4; 4)$ ou $C(4; -4)$.

Correction de l'exercice 14 - Partager une aire en deux

- **Aire du triangle** : $\frac{12 \times 6}{2} = 36$ ✓
- **Aire cherchée pour chaque partie** : 18 ✓
- **Propriété** : une droite issue de A partage l'aire dans le rapport où elle partage $[BC]$ ✓
- **Donc** : M doit être le **milieu** de $[BC]$ ✓
- **Milieu** :

$$M\left(\frac{12+0}{2}; \frac{0+6}{2}\right) = (6; 3)$$

- **Vérification — triangle ABM** : $\overrightarrow{AB} = (12; 0)$ et $\overrightarrow{AM} = (6; 3)$ ✓
- **Déterminant** : $36 - 0 = 36$, soit une aire de 18 ✓
- **Vérification — triangle AMC** : $\overrightarrow{AM} = (6; 3)$ et $\overrightarrow{AC} = (0; 6)$ ✓
- **Déterminant** : $36 - 0 = 36$, soit une aire de 18 ✓
- **Contrôle de la somme** : $18 + 18 = 36$ ✓
- **Justification de la propriété** : les triangles ABM et AMC ont la même hauteur depuis A ✓
- **Conséquence** : leurs aires sont proportionnelles à BM et MC ✓
- **Contrôle des longueurs** : $BC = \sqrt{144 + 36} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \approx 13,416$ ✓
- **Demi-longueur** : $3\sqrt{5} \approx 6,708$ ✓
- **Contrôle de BM** : $\sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ ✓
- **Partage dans un autre rapport** : pour $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, il faudrait M' tel que $\overrightarrow{BM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, soit $(8; 2)$ ✓

— **Contrôle** : $\det((12; 0); (8; 2)) = 24$, soit une aire de $12 = \frac{36}{3}$ ✓

Réponse. $M(6; 3)$, le milieu de $[BC]$.

Correction de l'exercice 15 - Périmètre minimal

- **Idée clé** : réfléchir A par rapport à l'axe des abscisses ✓
- **Symétrique de A** : $A'(0; -3)$ ✓
- **Propriété du symétrique** : pour tout M de l'axe, $MA = MA'$ ✓
- **Donc** : $MA + MB = MA' + MB$ ✓
- **Minimum de $MA' + MB$** : atteint quand M est sur le segment $[A'B]$ ✓
- **Droite $(A'B)$** : pente $\frac{5 - (-3)}{6 - 0} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ ✓
- **Équation** : $y = \frac{4}{3}x - 3$ ✓
- **Intersection avec $y = 0$** : $\frac{4}{3}x = 3$, donc $x = \frac{9}{4} = 2,25$ ✓
- **Point cherché** :

$$M(2,25; 0)$$

- **Valeur du minimum** : $A'B = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ ✓
- **Vérification** : $MA = \sqrt{5,0625 + 9} = \sqrt{14,0625} = 3,75$ ✓
- **Puis** : $MB = \sqrt{(6 - 2,25)^2 + 25} = \sqrt{14,0625 + 25} = \sqrt{39,0625} = 6,25$ ✓
- **Somme** : $3,75 + 6,25 = 10$ ✓
- **Contrôle avec un autre point** : $M'(3; 0)$ ✓
- **Distances** : $M'A = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} \approx 4,243$ et $M'B = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \approx 5,831$ ✓
- **Somme** : $\approx 10,074 > 10$ ✓
- **Cohérence** : le minimum est bien atteint en $M(2,25; 0)$ ✓

Réponse. $M(2,25; 0)$, avec un minimum de $MA + MB = 10$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : parc et allées

a) **Découpage par la diagonale $[AC]$** ✓

- **Triangle ABC** : $\overrightarrow{AB} = (40; 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (50; 30)$ ✓
- **Déterminant** : $40 \times 30 - 50 \times 0 = 1200$ ✓
- **Aire** : 600 m^2 ✓
- **Triangle ACD** : $\overrightarrow{AC} = (50; 30)$ et $\overrightarrow{AD} = (10; 40)$ ✓
- **Déterminant** : $50 \times 40 - 10 \times 30 = 2000 - 300 = 1700$ ✓
- **Aire** : 850 m^2 ✓
- **Aire totale** :

$$A = 600 + 850 = 1450 \text{ m}^2$$

- **Contrôle de vraisemblance** : le rectangle englobant mesure $50 \times 40 = 2000 \text{ m}^2$ ✓
- **Proportion** : $\frac{1450}{2000} = 72,5\%$ ✓

b) **Longueur AB** : 40 m ✓

- **Longueur BC** : $\sqrt{100 + 900} = \sqrt{1000} \approx 31,623 \text{ m}$ ✓
- **Longueur CD** : $\sqrt{1600 + 100} = \sqrt{1700} \approx 41,231 \text{ m}$ ✓
- **Longueur DA** : $\sqrt{100 + 1600} = \sqrt{1700} \approx 41,231 \text{ m}$ ✓
- **Périmètre** :

$$P \approx 40 + 31,623 + 41,231 + 41,231 \approx 154,085 \text{ m}$$

— **Arrondi au décimètre** : 154,1 m ✓

— **Remarque** : $CD = DA$, le quadrilatère est « isocèle » en D ✓

c) **Longueur de l'allée AC** : $\sqrt{2500 + 900} = \sqrt{3400} \approx 58,310 \text{ m}$ ✓

— **Aires des deux parties** : 600 m² et 850 m² ✓

— **Différence** : 250 m² ✓

— **Conclusion** : les deux parties ne sont **pas** d'aires égales ✓

— **Écart relatif** : $\frac{250}{1450} \approx 17,2\%$ ✓

d) **Objectif** : deux parties de 725 m² chacune ✓

— **Position du point P** : sur $[BC]$, donc $P = B + t\overrightarrow{BC}$ avec $t \in [0; 1]$ ✓

— **Coordonnées** : $\overrightarrow{BC} = (10; 30)$, donc $P(40 + 10t; 30t)$ ✓

— **Aire de ABP** : $\overrightarrow{AB} = (40; 0)$ et $\overrightarrow{AP} = (40 + 10t; 30t)$ ✓

— **Déterminant** : $40 \times 30t - 0 = 1200t$ ✓

— **Aire** : $600t$ ✓

— **Contrôle pour $t = 1$** : 600 m², l'aire de ABC ✓

— **Mais** : $600t \leq 600 < 725$, donc **aucun** point de $[BC]$ ne convient ✓

— **Conclusion** : il faut chercher P sur $[CD]$ ✓

— **Coordonnées** : $\overrightarrow{CD} = (-40; 10)$, donc $P(50 - 40s; 30 + 10s)$ avec $s \in [0; 1]$ ✓

— **Aire de ABCP** : c'est 600 (pour ABC) plus l'aire de ACP ✓

— **Triangle ACP** : $\overrightarrow{AC} = (50; 30)$ et $\overrightarrow{AP} = (50 - 40s; 30 + 10s)$ ✓

— **Déterminant** : $50(30 + 10s) - 30(50 - 40s) = 1500 + 500s - 1500 + 1200s = 1700s$ ✓

— **Aire** : $850s$ ✓

— **Équation** : $600 + 850s = 725$ ✓

— **Résolution** : $850s = 125$, donc $s = \frac{125}{850} = \frac{5}{34} \approx 0,1471$ ✓

— **Coordonnées de P** : $\left(50 - \frac{200}{34}; 30 + \frac{50}{34}\right) \approx (44,12; 31,47)$ ✓

— **Vérification** : $850 \times \frac{5}{34} = 125$, et $600 + 125 = 725$ ✓

Réponse. a) 1450 m² · b) $\approx 154,1 \text{ m}$ · c) $AC \approx 58,31 \text{ m}$, parties de 600 et 850 m² · d) sur $[CD]$, en $P \approx (44,12; 31,47)$.