Plaquette 4 – Aires, périmètres et configurations dans le repère

Géométrie repérée — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Aire d'un triangle dont un côté est horizontal ou vertical. Ce côté sert de base, sa longueur est un écart de coordonnées, et la hauteur aussi :

$$A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

Aire d'un polygone quelconque. On l'inscrit dans le plus petit rectangle aux côtés parallèles aux axes, puis on retire à l'aire de ce rectangle celles des triangles rectangles (et éventuellement des rectangles) qui l'entourent. On peut aussi le partager en triangles.

Figure	Aire
triangle	$\frac{1}{2} \times$ base $\times$ hauteur
parallélogramme	base $\times$ hauteur
trapèze	$\frac{(b+B)}{2} \times h$
losange	$\frac{d \times D}{2}$

Hauteur d'un triangle. Connaissant l'aire et une base :

$$h = \frac{2A}{\text{base}}$$

Périmètre. On additionne les longueurs des côtés, chacune calculée par la formule de distance. Le résultat comporte en général des racines : on donne la **valeur exacte** puis l'arrondi.

Cas favorables. Un côté **horizontal** ou **vertical** simplifie tout : sa longueur est un écart de coordonnées, et la hauteur associée aussi.

Contrôle de vraisemblance. L'aire d'un triangle est toujours inférieure à celle du rectangle qui l'encadre — c'est un test rapide et efficace.

Correction de l'exercice 1 – Aire par deux méthodes

Le côté $[AB]$ est horizontal ($y_A = y_B = 1$) : on le prend pour base, $AB = 6$. La hauteur issue de C est alors verticale, de longueur l'écart des ordonnées, $6 - 1 = 5$.

$$A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

Seconde méthode : le rectangle de côtés parallèles aux axes qui contient le triangle va de $x = 1$ à $x = 7$ et de $y = 1$ à $y = 6$, d'aire $6 \times 5 = 30$. On lui retire deux triangles rectangles, à gauche et à droite, d'aire $\frac{3 \times 5}{2} = 7{,}5$ chacun : $30 - 15 = 15$.

Le triangle est aussi isocèle en C : $AC = BC = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$.

Réponse. $A = 15$ par les deux méthodes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Aire d'un quadrilatère par découpage

a) $\overrightarrow{AB}(6\,;2)$ et $\overrightarrow{DC}(8-2\,;7-5)=(6\,;2)$ sont égaux : $ABCD$ est un parallélogramme.

b) Le rectangle qui le contient va de $x=0$ à $x=8$ et de $y=0$ à $y=7$: son aire vaut 56. Il reste à retirer les parties hors du parallélogramme.

— En bas à droite : le triangle rectangle de sommets A, $(6\,;0)$, B, d'aire $\dfrac{6\times 2}{2}=6$; le rectangle de 2 sur 2 sous B, d'aire 4 ; le triangle de sommets B, $(8\,;2)$, C, d'aire $\dfrac{2\times 5}{2}=5$. Total : 15.

— En haut à gauche, la partie symétrique (par rapport au centre $(4\,;3{,}5)$) a la même aire, 15.

$$A_{ABCD}=56-15-15=26$$

Réponse. a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(6\,;2)$ · b) $56-30=26$.

Correction de l'exercice 3 – Hauteur d'un triangle

Le rectangle qui contient le triangle va de $x=-1$ à $x=5$ et de $y=-2$ à $y=6$: il mesure 6 sur 8, d'aire 48. On retire les trois triangles rectangles qui entourent ABC :

— côté $[AB]$: triangle de côtés 6 et 4, d'aire 12 ;

— côté $[BC]$: triangle de côtés 2 et 8, d'aire 8 ;

— côté $[AC]$: triangle de côtés 4 et 4, d'aire 8.

$$A=48-12-8-8=20$$

La base opposée à A est $[BC]$, de longueur $\sqrt{4+64}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$. De $A=\dfrac{BC\times h}{2}$, on tire $h=\dfrac{2\times 20}{2\sqrt{17}}=\dfrac{20}{\sqrt{17}}\approx 4{,}85$. **Contrôle** : $\dfrac{8{,}246\times 4{,}851}{2}\approx 20$.

Réponse. $A=20$ et $h=\dfrac{20}{\sqrt{17}}\approx 4{,}851$.

Correction de l'exercice 4 – Aire d'un trapèze

$\overrightarrow{AB}(9\,;0)$ et $\overrightarrow{DC}(4\,;0)$ ont un déterminant nul : $(AB)\parallel(DC)$, et comme ils ne sont pas égaux, $ABCD$ est un **trapèze**, de bases 9 et 4. Les bases sont horizontales, à $y=0$ et $y=5$: la hauteur vaut 5.

$$A=\frac{(9+4)\times 5}{2}=32{,}5$$

Par découpage selon la diagonale $[AC]$: le triangle ABC a pour base $AB=9$ et pour hauteur 5, soit 22,5 ; le triangle ACD a pour base $DC=4$ (horizontale) et pour hauteur 5, soit 10. Total : 32,5, les deux méthodes concordent. Les côtés obliques, $\sqrt{29}$ et $\sqrt{34}$, sont différents : le trapèze n'est pas isocèle.

Réponse. Trapèze de bases 9 et 4, de hauteur 5 : $A=32{,}5$.

Correction de l'exercice 5 – Aire par soustraction

Le rectangle qui contient le triangle va de $x=1$ à $x=7$ et de $y=2$ à $y=8$: c'est un carré de 6 sur 6, d'aire 36. On retire les trois triangles rectangles qui entourent ABC :

— celui de sommets A, $(7\,;2)$, B, de côtés 6 et 3 : aire 9 ;

— celui de sommets B, $(7\,;8)$, C, de côtés 3 et 4 : aire 6 ;

— celui de sommets C, $(1\,;8)$, A, de côtés 2 et 6 : aire 6.

$$A=36-9-6-6=15$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Cette méthode ne demande aucune formule nouvelle, seulement l'aire d'un rectangle et celle d'un triangle rectangle. **Contrôle de vraisemblance** : l'aire du triangle est bien inférieure à la moitié de celle du carré.

Réponse. $36 - 9 - 6 - 6 = 15$.

Correction de l'exercice 6 – Triangle d'aire donnée

La base $[AB]$ est portée par l'axe des ordonnées, de longueur 6. La hauteur issue de C est la distance de C à cet axe, c'est-à-dire $|x_C|$. On veut

$$\frac{6 \times |x_C|}{2} = 21 \Leftrightarrow 3|x_C| = 21 \Leftrightarrow |x_C| = 7$$

Le point C étant sur la droite $y = 4$, on obtient $C_1(7\,;4)$ et $C_2(-7\,;4)$, symétriques par rapport à (AB).

L'ordonnée de C n'intervient pas : tout point des droites $x = 7$ et $x = -7$ donne la même aire, puisque la hauteur ne change pas. **Vérification** : $\frac{6 \times 7}{2} = 21$.

Réponse. $C_1(7\,;4)$ et $C_2(-7\,;4)$.

Correction de l'exercice 7 – Périmètre et valeur exacte

On calcule les trois longueurs : $AB = \sqrt{16 + 9} = 5$, $AC = \sqrt{9 + 16} = 5$ et $BC = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Le périmètre exact vaut

$$P = 5 + 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 5\sqrt{2} \approx 17{,}07$$

Le triangle est isocèle en A. De plus, $AB^2 + AC^2 = 25 + 25 = 50 = BC^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, il est rectangle en A. C'est un triangle rectangle isocèle, d'aire $\frac{5 \times 5}{2} = 12{,}5$.

Garder la valeur exacte $10 + 5\sqrt{2}$ jusqu'au bout évite les erreurs d'arrondi ; on n'arrondit qu'à la dernière étape.

Réponse. $P = 10 + 5\sqrt{2} \approx 17{,}07$ (triangle rectangle isocèle en A).

Correction de l'exercice 8 – Comparer deux aires

Le rectangle a pour aire $8 \times 6 = 48$. Pour le triangle MNC, on remarque que $[NC]$ est vertical, sur la droite $x = 8$, de longueur $6 - 2 = 4$. La hauteur issue de M est la distance de M à cette droite, $8 - 3 = 5$:

$$A_{MNC} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$$

Le triangle occupe $\frac{10}{48} \approx 20{,}8\,\%$ du rectangle.

Contrôle : le triangle MBC (base $MB = 5$, hauteur 6) a une aire de 15, et il se partage en MNC et MBN ; ce dernier a pour base $NB = 2$ et pour hauteur 5, soit 5. On retrouve $15 - 5 = 10$.

Réponse. $A_{MNC} = 10$, soit environ 20,8 % de l'aire du rectangle (48).

Correction de l'exercice 9 – Milieu, médiane et aire

Le milieu de $[BC]$ est $I\left(\frac{10 + 4}{2}\,;\frac{0 + 9}{2}\right) = (7\,;4{,}5)$.

Les triangles ABC et ABI ont la même base $[AB]$, horizontale, de longueur 10. Leurs hauteurs sont les ordonnées de C et de I :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$A_{ABC} = \frac{10 \times 9}{2} = 45 \qquad A_{ABI} = \frac{10 \times 4{,}5}{2} = 22{,}5$$

L'aire de AIC est donc $45 - 22{,}5 = 22{,}5$: la médiane $[AI]$ partage le triangle en deux parties de même aire.

Explication générale : les triangles ABI et AIC ont la même hauteur issue de A et des bases $[BI]$ et $[IC]$ de même longueur. Toute médiane partage un triangle en deux aires égales.

Réponse. $A_{ABI} = A_{AIC} = 22{,}5$, soit la moitié des 45 du triangle.

Correction de l'exercice 10 – Aire d'un pentagone

Le pentagone tient dans le rectangle de $x = 0$ à $x = 8$ et de $y = 0$ à $y = 7$, d'aire 56. Les côtés $[AB]$ et $[EA]$ sont sur les axes ; il reste à retirer les trois triangles rectangles qui entourent les autres côtés :

— côté $[BC]$: triangle de sommets B, $(8\,;0)$, C, de côtés 2 et 4, d'aire 4 ;
— côté $[CD]$: triangle de sommets C, $(8\,;7)$, D, de côtés 3 et 4, d'aire 6 ;
— côté $[DE]$: triangle de sommets D, $(0\,;7)$, E, de côtés 4 et 2, d'aire 4.

$$A = 56 - 4 - 6 - 4 = 42$$

Le pentagone occupe les trois quarts du rectangle. Un autre découpage, en triangles, redonne la même aire : le résultat ne dépend pas de la méthode.

Réponse. $A = 12 + 20 + 10 = 42$.

Correction de l'exercice 11 – Rapport d'aires et point mobile

L'aire de ABC, rectangle en A, vaut $\frac{6 \times 4}{2} = 12$. Le triangle AMC est rectangle en A aussi, de côtés $AM = t$ et $AC = 4$:

$$A_{AMC} = \frac{4t}{2} = 2t \qquad 0 \leq t \leq 6$$

On veut la moitié de l'aire de ABC : $2t = 6$, soit $t = 3$. Le point $M(3\,;0)$ est le milieu de $[AB]$.

Contrôle : le triangle MBC restant a pour base 3 et hauteur 4, d'aire 6. L'aire de AMC est proportionnelle à t : pour en garder un tiers, il faudrait $t = 2$.

Réponse. $A_{AMC} = 2t$, et $t = 3$ (le milieu de $[AB]$).

Correction de l'exercice 12 – Quadrilatère croisé

Les côtés $[AB]$ et $[CD]$ se croisent-ils ? On écrit les équations des droites : (AB) passe par l'origine avec le coefficient directeur $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, soit $y = \frac{2}{3}x$; (CD) a pour coefficient directeur $\frac{4-0}{0-6} = -\frac{2}{3}$ et passe par $(6\,;0)$, soit $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

$$\frac{2}{3}x = -\frac{2}{3}x + 4 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x = 4 \Leftrightarrow x = 3$$

Les droites se coupent en $E(3\,;2)$, qui est à l'intérieur des deux segments $(0 < 3 < 6)$: le quadrilatère est **croisé**.

Le triangle ACE a pour base $AC = 6$, horizontale, et pour hauteur 2 : aire 6. Le triangle BDE a pour base $BD = 6$, sur la droite $y = 4$, et pour hauteur $4 - 2 = 2$: aire 6 aussi.

Réponse. Croisé en $E(3\,;2)$, avec deux triangles de même aire 6.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 13 – Aire maximale

La base $[AB]$ est fixe, de longueur 8, sur l’axe des abscisses. La hauteur issue de $C(x\,;y)$ est $|y|$, donc l’aire vaut $4|y|$. Il faut rendre $|y|$ le plus grand possible.

C est sur le cercle de centre $(4\,;0)$ et de rayon 4 : $(x-4)^2+y^2=16$. Comme $(x-4)^2\geq 0$, on a $y^2\leq 16$, donc $|y|\leq 4$, avec égalité pour $x=4$.

$$A_{\max}=4\times 4=16 \quad \text{pour} \quad C(4\,;4) \text{ ou } C(4\,;-4)$$

$[AB]$ est un diamètre du cercle : tous les triangles ABC sont rectangles en C, et celui d’aire maximale est rectangle isocèle.

Réponse. $A_{\max}=16$, pour $C(4\,;4)$ ou $C(4\,;-4)$.

Correction de l’exercice 14 – Partager une aire en deux

L’aire de ABC, rectangle en A, vaut $\dfrac{12\times 6}{2}=36$: chaque partie doit mesurer 18.

Les triangles ABM et AMC ont la même hauteur issue de A (la distance de A à la droite (BC)) ; leurs aires sont donc proportionnelles à BM et MC. Elles sont égales quand M est le **milieu** de $[BC]$:

$$M\left(\frac{12+0}{2}\,;\frac{0+6}{2}\right)=(6\,;3)$$

Vérification : ABM a pour base $AB=12$ et pour hauteur $y_M=3$, soit 18 ; AMC a pour base $AC=6$, sur l’axe des ordonnées, et pour hauteur $x_M=6$, soit 18.

Réponse. $M(6\,;3)$, le milieu de $[BC]$.

Correction de l’exercice 15 – Périmètre minimal

On utilise la symétrie par rapport à l’axe des abscisses. Le symétrique de A est $A'(0\,;-3)$, et pour tout point M de l’axe, $MA=MA'$. Il s’agit donc de minimiser $MA'+MB$: le chemin le plus court entre A' et B est la ligne droite, et le minimum est atteint quand M est sur le segment $[A'B]$.

La droite $(A'B)$ a pour coefficient directeur $\dfrac{5+3}{6}=\dfrac{4}{3}$ et pour ordonnée à l’origine -3 : $y=\dfrac{4}{3}x-3$. Elle coupe l’axe des abscisses pour $\dfrac{4}{3}x=3$, soit $x=2{,}25$.

$$M(2{,}25\,;0) \qquad MA+MB=A'B=\sqrt{36+64}=10$$

Vérification : $MA=3{,}75$ et $MB=6{,}25$. Avec $M'(3\,;0)$, on trouverait environ 10,07.

Réponse. $M(2{,}25\,;0)$, avec un minimum de $MA+MB=10$.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : parc et allées

a) Le triangle ABC a pour base $AB=40$ (horizontale) et pour hauteur 30 : aire 600 m². Pour ACD, on l’inscrit dans le rectangle de 50 sur 40 (aire 2 000) et l’on retire trois triangles rectangles, d’aires $\dfrac{50\times 30}{2}=750$, $\dfrac{40\times 10}{2}=200$ et $\dfrac{10\times 40}{2}=200$: il reste 850 m². Aire totale : 1 450 m².

b) $AB=40$, $BC=\sqrt{100+900}\approx 31{,}623$, $CD=\sqrt{1\,600+100}\approx 41{,}231$ et $DA=\sqrt{100+1\,600}\approx 41{,}231$. Le périmètre vaut environ 154,1 m.

c) $AC=\sqrt{2\,500+900}=\sqrt{3\,400}\approx 58{,}31$ m. Les deux parties mesurent 600 et 850 m² : elles ne sont pas égales.

d) Si P est sur $[BC]$, son ordonnée est au plus 30, celle de C. Le triangle ABP a pour base $AB=40$ et pour hauteur $y_P\leq 30$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$A_{ABP} = \frac{40 \times y_P}{2} \leq 600 < 725$$

Aucun point de $[BC]$ ne convient : il faudrait chercher P sur $[CD]$.

Réponse. a) $1\,450$ m² · b) $\approx 154{,}1$ m · c) $AC \approx 58{,}31$ m, parties de 600 et 850 m² · d) non : le triangle ABP ne dépasse pas 600 m², moins que la moitié, 725 m².

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).