

Plaquette 3 - Cercles : équations, tangentes et intersections

Géométrie repérée — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les deux écritures d'un cercle.

Écriture	Nom	Ce qu'on y lit
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	canonique	centre et rayon directement
$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$	développée	rien sans transformation

Pour passer de la seconde à la première, on **complète les carrés** :

$$x^2 + \alpha x = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4}$$

Le résultat est un cercle si la constante obtenue à droite est **strictement positive**, un point si elle est nulle, et l'ensemble vide si elle est négative.

Position d'un point M par rapport au cercle de centre Ω et rayon r .

Condition	Position
$\Omega M < r$	intérieur
$\Omega M = r$	sur le cercle
$\Omega M > r$	extérieur

Position d'une droite D par rapport au cercle, en notant d la distance de Ω à D :

Condition	Position	Points communs
$d > r$	extérieure	0
$d = r$	tangente	1
$d < r$	sécante	2

Pour les droites **horizontales** ($y = k$) et **verticales** ($x = h$), la distance se lit directement : $|b - k|$ ou $|a - h|$.

Longueur d'une corde. Si une droite à distance d du centre coupe le cercle, la demi-corde ℓ vérifie

$$\ell^2 + d^2 = r^2 \quad \text{donc} \quad \text{corde} = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

Deux cercles de rayons r et r' à distance δ de centres : disjoints si $\delta > r + r'$, tangents extérieurement si $\delta = r + r'$, sécants si $|r - r'| < \delta < r + r'$.

Tangente au cercle en un point T . Elle est **perpendiculaire** au rayon $[\Omega T]$.

Correction de l'exercice 1 - De la forme développée à la forme canonique

- **Complétion du carré en x** : $x^2 - 10x = (x - 5)^2 - 25$ ✓
- **Complétion du carré en y** : $y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4$ ✓
- **Substitution** : $(x - 5)^2 - 25 + (y + 2)^2 - 4 + 13 = 0$ ✓

— **Somme des constantes** : $-25 - 4 + 13 = -16$ ✓

— **Forme canonique** :

$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

— **Nature** : un **cercle** ✓

— **Centre** : $\Omega(5; -2)$ ✓

— **Rayon** : $\sqrt{16} = 4$ ✓

— **Contrôle sur un point** : $(9; -2)$ donne $16 + 0 = 16$ ✓

— **Autre point** : $(5; 2)$ donne $0 + 16 = 16$ ✓

— **Vérification dans la forme développée** : $81 + 4 - 90 - 8 + 13 = 0$ ✓

— **Contrôle du second** : $25 + 4 - 50 + 8 + 13 = 0$ ✓

— **Position de l'origine** : $(0 - 5)^2 + (0 + 2)^2 = 29 > 16$ ✓

— **Conclusion** : l'origine est à l'**extérieur** ✓

— **Distance de l'origine au centre** : $\sqrt{29} \approx 5,385 > 4$ ✓

— **Distance minimale de l'origine au cercle** : $\sqrt{29} - 4 \approx 1,385$ ✓

Réponse. Le cercle de centre $\Omega(5; -2)$ et de rayon 4.

Correction de l'exercice 2 - Ensemble vide ou point unique

— **Complétion en x** : $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$ ✓

— **Complétion en y** : $y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1$ ✓

— **Premier cas** : $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 - 9 - 1 + 10 = 0$ ✓

— **Somme des constantes** : 0 ✓

— **Équation** :

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 0$$

— **Nature** : une somme de carrés nulle impose les deux carrés nuls ✓

— **Conclusion** : l'ensemble est réduit au **point** $(3; -1)$ ✓

— **Second cas** : $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 - 9 - 1 + 15 = 0$ ✓

— **Somme des constantes** : 5 ✓

— **Équation** :

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = -5$$

— **Nature** : une somme de carrés ne peut être négative ✓

— **Conclusion** : l'ensemble est **vide** ✓

— **Règle générale** : avec $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, on compare $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}$ à γ ✓

— **Premier cas** : $\frac{36 + 4}{4} = 10 = \gamma$, d'où le point unique ✓

— **Second cas** : $10 < 15$, d'où l'ensemble vide ✓

— **Un troisième cas** : avec $\gamma = 1$, on obtiendrait un rayon $\sqrt{10 - 1} = 3$ ✓

— **Contrôle** : $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ donne $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$ ✓

Réponse. Le premier est le point $(3; -1)$, le second est l'**ensemble vide**.

Correction de l'exercice 3 - Cercle passant par trois points

— **Observation** : $\overrightarrow{AB} = (8; 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (0; 6)$ sont perpendiculaires ✓

— **Conclusion** : le triangle est rectangle en A ✓

— **Propriété** : le centre est le **milieu de l'hypoténuse** $[BC]$ ✓

— **Centre** :

$$\Omega\left(\frac{8+0}{2}; \frac{0+6}{2}\right) = (4; 3)$$

— **Longueur** BC : $\sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ ✓

— **Rayon** : 5 ✓

— **Contrôle** : $\Omega A = \sqrt{16 + 9} = 5$ ✓

— **Contrôle** : $\Omega B = \sqrt{16 + 9} = 5$ ✓

— **Contrôle** : $\Omega C = \sqrt{16 + 9} = 5$ ✓

— **Équation canonique** :

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

— **Forme développée** : $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 25$ ✓

— **Simplification** : $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ ✓

— **Contrôle en A** : $0 = 0$ ✓

— **Contrôle en B** : $64 - 64 = 0$ ✓

— **Contrôle en C** : $36 - 36 = 0$ ✓

— **Remarque sur la forme développée** : l'absence de constante traduit le passage par l'origine ✓

Réponse. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$, soit $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$.

Correction de l'exercice 4 - Droite tangente

— **Distance à $y = 2$** : $|5 - 2| = 3$ ✓

— **Comparaison au rayon** : $3 = 3$ ✓

— **Conclusion** : la droite est **tangente** ✓

— **Point de tangence** : $(2; 2)$, projeté du centre ✓

— **Contrôle** : $(2 - 2)^2 + (2 - 5)^2 = 9 = 3^2$ ✓

— **Distance à $x = 6$** : $|2 - 6| = 4$ ✓

— **Comparaison** : $4 > 3$ ✓

— **Conclusion** : la droite est **extérieure**, aucun point commun ✓

— **Distance à $y = 9$** : $|5 - 9| = 4$ ✓

— **Conclusion** : également **extérieure** ✓

— **Droite $y = 4$, pour comparaison** : distance $1 < 3$, donc **sécante** ✓

— **Points d'intersection avec $y = 4$** : $(x - 2)^2 + 1 = 9$, donc $(x - 2)^2 = 8$ ✓

— **Solutions** : $x = 2 \pm 2\sqrt{2}$ ✓

— **Longueur de la corde** : $4\sqrt{2} \approx 5,657$ ✓

— **Contrôle par la formule** : $2\sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$ ✓

— **Tangente horizontale opposée** : $y = 8$, à distance 3 du centre ✓

— **Contrôle** : le cercle est compris entre $y = 2$ et $y = 8$ ✓

Réponse. Tangente à $y = 2$; extérieure à $x = 6$ et à $y = 9$.

Correction de l'exercice 5 - Corde d'un cercle

— **Distance du centre à la droite** : $|0 - 5| = 5$ ✓

— **Comparaison au rayon** : $5 < 13$, la droite est **sécante** ✓

— **Formule de la demi-corde** : $\ell^2 = r^2 - d^2$ ✓

- **Calcul** : $\ell^2 = 169 - 25 = 144$ ✓
- **Demi-corde** : $\ell = 12$ ✓
- **Longueur de la corde** :

$$2 \times 12 = 24$$
- **Points d'intersection** : $x^2 + 25 = 169$, donc $x^2 = 144$ ✓
- **Solutions** : $x = -12$ ou $x = 12$ ✓
- **Points** : $(-12; 5)$ et $(12; 5)$ ✓
- **Contrôle de la distance entre eux** : 24 ✓
- **Triplet pythagoricien** : 5-12-13 ✓
- **Corde pour $y = 12$** : $2\sqrt{169 - 144} = 2 \times 5 = 10$ ✓
- **Corde pour $y = 0$** : $2 \times 13 = 26$, c'est le **diamètre** ✓
- **Corde pour $y = 13$** : 0, la droite est tangente ✓
- **Règle** : la corde est d'autant plus longue que la droite est proche du centre ✓
- **Aire du triangle formé par la corde et le centre** : $\frac{24 \times 5}{2} = 60$ ✓

Réponse. La corde mesure 24 (points $(-12; 5)$ et $(12; 5)$).

Correction de l'exercice 6 - Deux cercles sécants

- **Distance des centres** : $\delta = 8$ ✓
- **Somme des rayons** : $5 + 5 = 10$ ✓
- **Différence des rayons** : $|5 - 5| = 0$ ✓
- **Comparaison** : $0 < 8 < 10$ ✓
- **Conclusion** : les cercles sont **sécants** en deux points ✓
- **Recherche des points** : $x^2 + y^2 = 25$ et $(x - 8)^2 + y^2 = 25$ ✓
- **Soustraction des deux équations** : $x^2 - (x - 8)^2 = 0$ ✓
- **Développement** : $16x - 64 = 0$ ✓
- **Donc** : $x = 4$ ✓
- **Ordonnées** : $16 + y^2 = 25$, donc $y^2 = 9$ ✓
- **Solutions** : $y = -3$ ou $y = 3$ ✓
- **Points d'intersection** :

$$(4; 3) \quad \text{et} \quad (4; -3)$$
- **Contrôle dans C_1** : $16 + 9 = 25$ ✓
- **Contrôle dans C_2** : $16 + 9 = 25$ ✓
- **Longueur de la corde commune** : 6 ✓
- **Symétrie** : la configuration est symétrique par rapport à la droite $x = 4$, médiatrice du segment des centres ✓
- **Cas tangent** : avec $\delta = 10$, les cercles seraient tangents en $(5; 0)$ ✓

Réponse. Sécants, en $(4; 3)$ et $(4; -3)$.

Correction de l'exercice 7 - Cercles tangents

- **Distance des centres** : $AB = \sqrt{(7 - 1)^2 + (10 - 2)^2}$ ✓
- **Calcul** : $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ ✓
- **Somme des rayons** : $3 + 7 = 10$ ✓
- **Comparaison** : $\delta = 10 = r + r'$ ✓
- **Conclusion** : les cercles sont **tangents extérieurement** ✓

- **Point de tangence** : il est sur $[AB]$, à distance 3 de A ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{AB}$** : $(6; 8)$, de norme 10 ✓
- **Vecteur unitaire** : $(0,6; 0,8)$ ✓
- **Déplacement de 3** : $(1,8; 2,4)$ ✓
- **Point de tangence** :

$$T(1 + 1,8; 2 + 2,4) = (2,8; 4,4)$$

- **Contrôle depuis A** : $AT = \sqrt{3,24 + 5,76} = \sqrt{9} = 3$ ✓
- **Contrôle depuis B** : $BT = \sqrt{(7 - 2,8)^2 + (10 - 4,4)^2} = \sqrt{17,64 + 31,36} = \sqrt{49} = 7$ ✓
- **Cohérence** : $3 + 7 = 10 = AB$ ✓
- **Tangence intérieure, pour comparaison** : elle exigerait $\delta = |7 - 3| = 4$ ✓
- **Cas des cercles disjoints** : il faudrait $\delta > 10$ ✓
- **Cas d'un cercle dans l'autre** : il faudrait $\delta < 4$ ✓

Réponse. Tangents **extérieurement** ($AB = 10 = 3 + 7$), au point $T(2,8; 4,4)$.

Correction de l'exercice 8 - Cercle inscrit dans un carré

- **Centre commun** : le centre du carré, soit $(5; 5)$ ✓
- **Cercle inscrit** : il est tangent aux quatre côtés ✓
- **Rayon** : la distance du centre à un côté, soit 5 ✓
- **Équation** :

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

- **Points de tangence** : $(5; 0)$, $(10; 5)$, $(5; 10)$, $(0; 5)$ ✓
- **Contrôle** : $(5 - 5)^2 + (0 - 5)^2 = 25$ ✓
- **Cercle circonscrit** : il passe par les quatre sommets ✓
- **Rayon** : la distance du centre à un sommet ✓
- **Calcul** : $\sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,071$ ✓
- **Équation** :

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 50$$

- **Contrôle en $(0; 0)$** : $25 + 25 = 50$ ✓
- **Contrôle en $(10; 10)$** : $25 + 25 = 50$ ✓
- **Rapport des rayons** : $\frac{5\sqrt{2}}{5} = \sqrt{2} \approx 1,414$ ✓
- **Rapport des aires des disques** : $(\sqrt{2})^2 = 2$ ✓
- **Aires** : $25\pi \approx 78,54$ et $50\pi \approx 157,08$ ✓
- **Aire du carré** : 100, bien comprise entre les deux ✓

Réponse. Inscrit : $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ · circonscrit : $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 50$.

Correction de l'exercice 9 - Intersection cercle et droite oblique

- **Substitution** : on remplace y par $x + 1$ ✓
- **Équation** : $x^2 + (x + 1)^2 = 25$ ✓
- **Développement** : $x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$ ✓
- **Réduction** : $2x^2 + 2x - 24 = 0$, soit $x^2 + x - 12 = 0$ ✓
- **Discriminant** : $\Delta = 1 + 48 = 49$ ✓
- **Racine carrée** : 7 ✓

- **Solutions** : $x = \frac{-1-7}{2} = -4$ ou $x = \frac{-1+7}{2} = 3$ ✓
- **Ordonnées** : $y = -3$ et $y = 4$ ✓
- **Points d'intersection** :
 $(-4; -3)$ et $(3; 4)$
- **Contrôle du premier** : $16 + 9 = 25$ ✓
- **Contrôle du second** : $9 + 16 = 25$ ✓
- **Nombre de points** : deux, donc la droite est **sécante** ✓
- **Longueur de la corde** : $\sqrt{49 + 49} = 7\sqrt{2} \approx 9,899$ ✓
- **Distance du centre à la droite** : le milieu de la corde est $(-0,5; 0,5)$ ✓
- **Calcul** : $\sqrt{0,25 + 0,25} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$ ✓
- **Contrôle par la formule de la corde** : $2\sqrt{25 - 0,5} = 2\sqrt{24,5} = 7\sqrt{2}$ ✓

Réponse. $(-4; -3)$ et $(3; 4)$.

Correction de l'exercice 10 - Tangente en un point du cercle

- **Vérification de l'appartenance** : $16 + 9 = 25$ ✓
- **Propriété** : la tangente est **perpendiculaire** au rayon $[OT]$ ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{OT}$** : $(4; 3)$, de pente $\frac{3}{4}$ ✓
- **Pente de la tangente** : $-\frac{4}{3}$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -1$ ✓
- **Équation** : $y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 4)$ ✓
- **Développement** : $y = -\frac{4}{3}x + \frac{16}{3} + 3 = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$ ✓
- **Forme sans fraction** : $4x + 3y = 25$ ✓
- **Contrôle en T** : $16 + 9 = 25$ ✓
- **Remarque élégante** : pour le cercle $x^2 + y^2 = r^2$, la tangente en $(x_0; y_0)$ s'écrit $x_0x + y_0y = r^2$ ✓
- **Vérification** : $4x + 3y = 25$ correspond bien à cette formule ✓
- **Autre point de la tangente** : $(1; 7)$, car $4 + 21 = 25$ ✓
- **Distance de O à ce point** : $\sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} \approx 7,071 > 5$ ✓
- **Cohérence** : tout point de la tangente autre que T est à l'**extérieur** du cercle ✓
- **Tangente au point diamétralement opposé $(-4; -3)$** : $4x + 3y = -25$, parallèle à la première ✓

Réponse. $4x + 3y = 25$, soit $y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$.

Correction de l'exercice 11 - Cercle tangent à un axe

- **Tangent à l'axe des abscisses** : le rayon vaut la distance du centre à cet axe ✓
- **Distance** : $|-3| = 3$ ✓
- **Équation** :

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 9$$
- **Point de tangence** : $(4; 0)$ ✓
- **Contrôle** : $0 + 9 = 9$ ✓

- **Tangent à l'axe des ordonnées** : le rayon vaut la distance à cet axe ✓
- **Distance** : $|4| = 4$ ✓
- **Équation** :

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

- **Point de tangence** : $(0; -3)$ ✓
- **Contrôle** : $16 + 0 = 16$ ✓
- **Cercle tangent aux deux axes ?** Il faudrait $|a| = |b|$ ✓
- **Ici** : $4 \neq 3$, c'est donc **impossible** avec ce centre ✓
- **Position de l'origine pour le premier cercle** : $16 + 9 = 25 > 9$, à l'extérieur ✓
- **Pour le second** : $25 > 16$, également à l'extérieur ✓
- **Distance de l'origine au centre** : $\sqrt{25} = 5$ ✓
- **Cercle de centre Ω passant par l'origine** : rayon 5, soit $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$ ✓
- **Comparaison des trois rayons** : $3 < 4 < 5$ ✓

Réponse. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 9$ puis $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 16$.

Correction de l'exercice 12 - Trouver un rayon

- **Distance du centre à l'axe des abscisses** : $|4| = 4$ ✓
- **Condition de sécance** : $d < r$ ✓
- **Donc** :

$$r > 4$$

- **Cas $r = 4$** : le cercle est **tangent** à l'axe, en $(3; 0)$ ✓
- **Cas $r < 4$** : aucun point commun ✓
- **Vérification pour $r = 5$** : $(x - 3)^2 + 16 = 25$, donc $(x - 3)^2 = 9$ ✓
- **Solutions** : $x = 0$ ou $x = 6$ ✓
- **Points** : $(0; 0)$ et $(6; 0)$ ✓
- **Longueur de la corde** : 6 ✓
- **Contrôle par la formule** : $2\sqrt{25 - 16} = 2 \times 3 = 6$ ✓
- **Vérification pour $r = 4$** : $(x - 3)^2 = 0$, donc l'unique point $(3; 0)$ ✓
- **Vérification pour $r = 3$** : $(x - 3)^2 = -7$, aucune solution ✓
- **Longueur de la corde en fonction de r** : $2\sqrt{r^2 - 16}$ ✓
- **Contrôle pour $r = 5$** : $2\sqrt{9} = 6$ ✓
- **Pour une corde de 10** : $r^2 - 16 = 25$, donc $r = \sqrt{41} \approx 6,403$ ✓
- **Contrôle** : $2\sqrt{41 - 16} = 2 \times 5 = 10$ ✓

Réponse. $r > 4$ (tangence pour $r = 4$, aucun point pour $r < 4$).

Correction de l'exercice 13 - Aire d'un disque et distance

- **Distance entre les antennes** : $AB = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$ km ✓
- **Somme des rayons** : $8 + 8 = 16$ ✓
- **Comparaison** : $13 < 16$ ✓
- **Conclusion** : les zones se **chevauchent** ✓
- **Distance AP** : $\sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} \approx 6,325$ km ✓
- **Comparaison au rayon** : $6,325 < 8$ ✓
- **Conclusion** : P est couvert par A ✓

- **Distance BP** : $\sqrt{(12-6)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} \approx 6,708 \text{ km} \checkmark$
- **Comparaison** : $6,708 < 8 \checkmark$
- **Conclusion** : P est aussi couvert par $B \checkmark$
- **Réponse** : P est dans la **zone de recouvrement** $\checkmark$
- **Aire d'une zone** : $\pi \times 64 \approx 201,06 \text{ km}^2 \checkmark$
- **Un point non couvert** : $Q(20; 0)$ donne $AQ = 20 > 8 \checkmark$
- **Et** : $BQ = \sqrt{64+25} = \sqrt{89} \approx 9,434 > 8 \checkmark$
- **Conclusion pour Q** : il n'est couvert par **aucune** antenne $\checkmark$
- **Rayon minimal pour couvrir Q depuis B** : $\sqrt{89} \approx 9,434 \text{ km} \checkmark$
- **Rayon minimal pour que les zones soient tangentes** : $\frac{13}{2} = 6,5 \text{ km} \checkmark$

Réponse. Oui, $13 < 16$: les zones se chevauchent, et P est couvert par les deux (6,325 et 6,708 km).

Correction de l'exercice 14 - Cercle et symétrie

- **Centre de C** : $\Omega(3; 1) \checkmark$
- **Rayon** : $4 \checkmark$
- **Principe** : une symétrie conserve les longueurs, donc le rayon est **inchangé** $\checkmark$
- **Symétrie de centre O** : l'image du centre est $(-3; -1) \checkmark$
- **Équation de l'image** :

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 16$$

- **Symétrie d'axe (Ox)** : l'image du centre est $(3; -1) \checkmark$
- **Équation de l'image** :

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 16$$

- **Contrôle du premier** : le point $(1; -1)$ vérifie $16 + 0 = 16 \checkmark$
- **Son symétrique par rapport à O** : $(-1; 1)$, qui vérifie bien l'équation de $C \checkmark$
- **Contrôle** : $(-1-3)^2 + (1-1)^2 = 16 \checkmark$
- **Les deux images sont-elles confondues ?** Non, leurs centres diffèrent $\checkmark$
- **Distance entre les deux centres images** : $|3 - (-3)| = 6 \checkmark$
- **Ces deux cercles sont-ils sécants ?** $6 < 4 + 4 = 8$, donc **oui** $\checkmark$
- **Points communs** : en résolvant, $x = 0$ et $(y+1)^2 = 7 \checkmark$
- **Solutions** : $y = -1 \pm \sqrt{7}$, soit environ 1,646 et -3,646 $\checkmark$
- **Contrôle** : $9 + 7 = 16 \checkmark$

Réponse. Par la symétrie centrale : $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 16$ · par l'axe (Ox) : $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 16$.

Correction de l'exercice 15 - Cercle défini par une condition de distance

- **Traduction** : $MA^2 = 4MB^2 \checkmark$
- **Écriture avec M(x; y)** : $x^2 + y^2 = 4[(x-6)^2 + y^2] \checkmark$
- **Développement du membre de droite** : $4(x^2 - 12x + 36 + y^2) \checkmark$
- **Équation** : $x^2 + y^2 = 4x^2 - 48x + 144 + 4y^2 \checkmark$
- **Réorganisation** : $0 = 3x^2 + 3y^2 - 48x + 144 \checkmark$
- **Division par 3** : $x^2 + y^2 - 16x + 48 = 0 \checkmark$

— **Complétion du carré** : $(x - 8)^2 - 64 + y^2 + 48 = 0$ ✓

— **Forme canonique** :

$$(x - 8)^2 + y^2 = 16$$

— **Nature** : un **cercle** de centre $(8; 0)$ et de rayon 4 ✓

— **Nom de cet ensemble** : un **cercle d'Apollonius** ✓

— **Contrôle sur un point** : $(4; 0)$ vérifie $16 + 0 = 16$ ✓

— **Vérification de la condition** : $MA = 4$ et $MB = |4 - 6| = 2$, donc $MA = 2MB$ ✓

— **Autre point** : $(12; 0)$ donne $MA = 12$ et $MB = 6$ ✓

— **Contrôle** : $12 = 2 \times 6$ ✓

— **Un troisième point** : $(8; 4)$ donne $MA = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$ et $MB = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$ ✓

— **Contrôle** : $\sqrt{80} = 2\sqrt{20}$, car $80 = 4 \times 20$ ✓

Réponse. Le cercle $(x - 8)^2 + y^2 = 16$, de centre $(8; 0)$ et rayon 4.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : deux cercles et une droite

a) **Pour C_1** : on complète les carrés ✓

— **En x** : $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$ ✓

— **En y** : $y^2 - 6y = (y - 3)^2 - 9$ ✓

— **Substitution** : $(x - 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + 9 = 0$ ✓

— **Forme canonique** :

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

— **Centre et rayon** : $\Omega_1(2; 3)$ et $r_1 = 2$ ✓

— **Pour C_2** : la forme est déjà canonique ✓

— **Centre et rayon** : $\Omega_2(7; 3)$ et $r_2 = 2$ ✓

b) **Distance des centres** : $\Omega_1\Omega_2 = |7 - 2| = 5$ ✓

— **Somme des rayons** : $2 + 2 = 4$ ✓

— **Comparaison** : $5 > 4$ ✓

— **Conclusion** : les cercles sont **disjoints et extérieurs** l'un à l'autre ✓

— **Écart entre eux** : $5 - 4 = 1$ ✓

— **Rayon commun qui les rendrait tangents** : 2,5 ✓

— **Contrôle** : $2,5 + 2,5 = 5$ ✓

c) **Distance de Ω_1 à la droite $y = 3$** : $|3 - 3| = 0$ ✓

— **Conclusion** : la droite passe par le **centre**, c'est donc un diamètre ✓

— **Équation à résoudre** : $(x - 2)^2 + 0 = 4$ ✓

— **Solutions** : $x - 2 = \pm 2$, donc $x = 0$ ou $x = 4$ ✓

— **Points d'intersection** :

$$(0; 3) \text{ et } (4; 3)$$

— **Longueur de la corde** : 4, égale au diamètre ✓

— **Contrôle par la formule** : $2\sqrt{4 - 0} = 4$ ✓

d) **Points d'abscisse 2** : $(2 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ ✓

— **Donc** : $(y - 3)^2 = 4$, soit $y = 1$ ou $y = 5$ ✓

— **Points** : $(2; 1)$ et $(2; 5)$ ✓

— **Le plus haut** : $T(2; 5)$ ✓

- **Vecteur rayon** : $\overrightarrow{\Omega_1 T} = (0; 2)$, **vertical** ✓
- **Conclusion** : la tangente est **horizontale** ✓
- **Équation** :

$$y = 5$$

- **Contrôle** : la distance de $\Omega_1(2; 3)$ à cette droite vaut $|5 - 3| = 2 = r_1$ ✓
- **Cohérence** : la droite est bien tangente ✓
- **Tangente à l'autre point** : $y = 1$, également horizontale ✓
- **Ces deux tangentes** : elles encadrent le cercle, distantes de 4, soit le diamètre ✓
- **Cette droite** $y = 5$ **coupe-t-elle** C_2 ? La distance de $\Omega_2(7; 3)$ vaut $2 = r_2$ ✓
- **Conclusion remarquable** : $y = 5$ est tangente aux **deux** cercles, qui ont même rayon et même ordonnée de centre ✓

Réponse. a) $\Omega_1(2; 3)$, $r_1 = 2$ et $\Omega_2(7; 3)$, $r_2 = 2$ · b) disjoints ($5 > 4$) · c) $(0; 3)$ et $(4; 3)$ · d) $T(2; 5)$ et tangente $y = 5$.