# Plaquette 3 – Cercles : centre, rayon, tangentes et positions relatives

## Géométrie repérée — Seconde

Corrections détaillées

### Boîte à outils

**Déterminer un cercle.** Par un diamètre $[AB]$ : centre au milieu de $[AB]$, rayon $\dfrac{AB}{2}$. Par son centre et un point $A$ : rayon $\Omega A$. Par trois points : centre à l'intersection de deux médiatrices ; si le triangle est rectangle, c'est le milieu de l'hypoténuse.

**Position d'un point $M$ par rapport au cercle de centre $\Omega$ et rayon $r$.**

| Condition | Position |
|---|---|
| $\Omega M < r$ | intérieur |
| $\Omega M = r$ | sur le cercle |
| $\Omega M > r$ | extérieur |

**Position d'une droite $D$** par rapport au cercle, en notant $d$ la distance de $\Omega$ à $D$ :

| Condition | Position | Points communs |
|---|---|---|
| $d > r$ | extérieure | 0 |
| $d = r$ | **tangente** | 1 |
| $d < r$ | sécante | 2 |

Pour les droites **horizontales** ($y = k$) et **verticales** ($x = h$), la distance se lit directement : $|b - k|$ ou $|a - h|$.

**Longueur d'une corde.** Si une droite à distance $d$ du centre coupe le cercle, la demi-corde $\ell$ vérifie

$$\ell^2 + d^2 = r^2 \qquad \text{donc} \qquad \text{corde} = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

**Deux cercles** de rayons $r$ et $r'$ à distance $\delta$ de centres : disjoints si $\delta > r + r'$, tangents extérieurement si $\delta = r + r'$, sécants si $|r - r'| < \delta < r + r'$.

**Tangente au cercle en un point $T$.** Elle est **perpendiculaire** au rayon $[\Omega T]$. Pour le montrer en repère, on vérifie que le triangle $\Omega TP$ est rectangle en $T$, pour un point $P$ de la droite, par la réciproque du théorème de Pythagore.

## Correction de l'exercice 1 – Intérieur, sur ou extérieur

Un point est sur le cercle quand sa distance au centre vaut le rayon, à l'intérieur quand elle est plus petite, à l'extérieur quand elle est plus grande. On compare les carrés des distances à $4^2 = 16$ :

$$\Omega A^2 = 4^2 + 0^2 = 16 \qquad \Omega B^2 = 0^2 + 4^2 = 16 \qquad \Omega C^2 = (-1)^2 + 1^2 = 2 \qquad \Omega O^2 = 5^2 + 2^2 = 29$$

$A$ et $B$ sont **sur** le cercle ; $C$ est **à l'intérieur** ($\sqrt{2} \approx 1{,}41 < 4$) ; l'origine est **à l'extérieur** ($\sqrt{29} \approx 5{,}39 > 4$).

$A$ et $B$ se lisent sans calcul : ils sont à 4 unités du centre, l'un vers la droite, l'autre vers le haut.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** $A$ et $B$ sur le cercle ; $C$ à l'intérieur ($\Omega C = \sqrt{2}$) ; $O$ à l'extérieur ($\Omega O = \sqrt{29}$).

## Correction de l'exercice 2 – Cercle de diamètre donné

a) Le centre est le milieu du diamètre : $\Omega\left(\frac{-1+7}{2} ; \frac{3-3}{2}\right) = (3\,;0)$. Le rayon est la moitié de $AB = \sqrt{8^2+6^2} = 10$, soit 5.

b) $\Omega O = 3 < 5$ : l'origine est à l'intérieur. Pour $D$ :

$$\Omega D^2 = (6-3)^2 + (4-0)^2 = 9 + 16 = 25$$

donc $\Omega D = 5$ et $D$ est sur le cercle.

c) $D$ est sur le cercle de diamètre $[AB]$ : le triangle $ABD$ est rectangle en $D$. **Contrôle** par Pythagore : $DA^2 = 49 + 1 = 50$, $DB^2 = 1 + 49 = 50$, et $50 + 50 = 100 = AB^2$. Il est même isocèle.

**Réponse.** a) $\Omega(3\,;0)$, rayon 5 · b) $O$ à l'intérieur, $D$ sur le cercle · c) rectangle en $D$.

## Correction de l'exercice 3 – Cercle passant par trois points

Les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont portés par les axes, perpendiculaires : le triangle $ABC$ est rectangle en $A$. Le cercle qui passe par ses trois sommets a pour diamètre l'hypoténuse $[BC]$ ; son centre est le milieu de $[BC]$ :

$$\Omega\left(\frac{8+0}{2} ; \frac{0+6}{2}\right) = (4\,;3) \qquad r = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{64+36}}{2} = 5$$

**Contrôle** : $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \sqrt{16+9} = 5$. C'est le triplet 6-8-10, double de 3-4-5.

**Réponse.** Centre $\Omega(4\,;3)$, milieu de $[BC]$, et rayon 5.

## Correction de l'exercice 4 – Droite tangente

Une droite est tangente à un cercle quand sa distance au centre est égale au rayon ; elle le coupe en deux points si cette distance est plus petite, et ne le rencontre pas si elle est plus grande.

— Droite $y = 2$ : la distance au centre est $|5-2| = 3$, égale au rayon. Elle est **tangente**, au point $(2\,;2)$.
— Droite $x = 6$ : distance $|6-2| = 4 > 3$. Elle est **extérieure**.
— Droite $y = 9$ : distance $|9-5| = 4 > 3$. Elle est aussi **extérieure**.

$$d = r \Rightarrow \text{tangente} \qquad d < r \Rightarrow \text{sécante} \qquad d > r \Rightarrow \text{extérieure}$$

Le cercle est compris entre les droites $y = 2$ et $y = 8$, ses deux tangentes horizontales.

**Réponse.** Tangente à $y = 2$ ; extérieure à $x = 6$ et à $y = 9$.

## Correction de l'exercice 5 – Corde d'un cercle

La distance du centre à la droite $y = 5$ vaut 5, inférieure au rayon 13 : la droite coupe le cercle. Un point d'intersection $M(x\,;5)$ vérifie $OM = 13$ :

$$x^2 + 5^2 = 13^2 \Leftrightarrow x^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow x = 12 \text{ ou } x = -12$$

Les points d'intersection sont $(-12\,;5)$ et $(12\,;5)$, et la corde mesure 24.

On reconnaît le théorème de Pythagore dans le triangle formé par le centre, le milieu de la corde et une extrémité : $12^2 + 5^2 = 13^2$. Plus la droite est proche du centre, plus la corde est longue : pour $y = 0$, on obtiendrait le diamètre, 26.

**Réponse.** La corde mesure 24 (points $(-12\,;5)$ et $(12\,;5)$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l’exercice 6 – Deux cercles sécants

On compare la distance des centres, 8, aux rayons : la somme vaut 10 et la différence 0. Comme $0 < 8 < 10$, les cercles sont **sécants** en deux points.

Un point commun est à la distance 5 des deux centres : il est donc sur la médiatrice du segment qui les joint, la droite $x = 4$. On cherche alors les points $M(4\,;y)$ à distance 5 de l’origine :

$$4^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = 3 \text{ ou } y = -3$$

Les points d’intersection sont $(4\,;3)$ et $(4\,;-3)$. **Contrôle** : la distance au second centre vaut $\sqrt{(4-8)^2 + 3^2} = 5$.

**Réponse.** Sécants, en $(4\,;3)$ et $(4\,;-3)$.

## Correction de l’exercice 7 – Cercles tangents

La distance des centres vaut $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, égale à la somme des rayons, $3 + 7$. Les cercles sont donc **tangents extérieurement** : ils se touchent en un seul point, situé sur le segment $[AB]$, à 3 de $A$.

Ce point $T$ vérifie $\overrightarrow{AT} = \frac{3}{10}\overrightarrow{AB}$, puisque $AT = 3$ et $AB = 10$ :

$$\overrightarrow{AT} = \frac{3}{10}(6\,;8) = (1{,}8\,;2{,}4) \qquad T(2{,}8\,;4{,}4)$$

**Contrôle** : $AT = \sqrt{1{,}8^2 + 2{,}4^2} = 3$ et $BT = \sqrt{4{,}2^2 + 5{,}6^2} = \sqrt{49} = 7$. Une tangence intérieure demanderait une distance des centres égale à $7 - 3 = 4$.

**Réponse.** Tangents **extérieurement** ($AB = 10 = 3 + 7$), au point $T(2{,}8\,;4{,}4)$.

## Correction de l’exercice 8 – Cercle inscrit dans un carré

Les deux cercles ont pour centre le centre du carré, milieu des diagonales : $(5\,;5)$.

Le cercle inscrit est tangent aux côtés : son rayon est la distance du centre à un côté, par exemple au côté porté par l’axe des abscisses, soit 5. Il touche les côtés en leurs milieux, comme $(5\,;0)$.

Le cercle circonscrit passe par les sommets : son rayon est la distance du centre à un sommet,

$$R = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$$

Le rapport des rayons vaut $\sqrt{2}$ ; les aires des disques, $25\pi$ et $50\pi$, encadrent bien celle du carré, 100.

**Réponse.** Même centre $(5\,;5)$ ; rayon 5 pour le cercle inscrit, $5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ pour le cercle circonscrit.

## Correction de l’exercice 9 – Une droite qui coupe le cercle

a) $OA^2 = 9 + 16 = 25$ et $OB^2 = 16 + 9 = 25$ : les deux points sont à distance 5 de $O$, donc sur $C$. Ils vérifient aussi l’équation de $d$ : $4 = 3 + 1$ et $-3 = -4 + 1$.

b) $AB = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$. Le milieu de $[AB]$ est $I(-0{,}5\,;0{,}5)$, et

$$OI = \sqrt{0{,}25 + 0{,}25} = \sqrt{0{,}5} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$$

**Contrôle** par Pythagore dans le triangle $OIA$ (le rayon $[OI]$ issu du centre est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

perpendiculaire à la corde en son milieu) : $OI^2 + IA^2 = 0{,}5 + 24{,}5 = 25 = OA^2$.

**Réponse.** a) $OA = OB = 5$, et les deux points vérifient $y = x + 1$ · b) $AB = 7\sqrt{2} \approx 9{,}90$ ; distance $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$.

## Correction de l’exercice 10 – Une tangente en un point du cercle

a) $OT^2 = 16 + 9 = 25$, donc $OT = 5$ : $T$ est sur le cercle.

b) On calcule les carrés des côtés du triangle $OTP$ : $OT^2 = 25$,
$TP^2 = (1-4)^2 + (7-3)^2 = 9 + 16 = 25$ et $OP^2 = 1 + 49 = 50$. Comme

$$OT^2 + TP^2 = 25 + 25 = 50 = OP^2$$

la réciproque du théorème de Pythagore montre que $OTP$ est rectangle en $T$.

c) La droite $(TP)$ est perpendiculaire au rayon $[OT]$ au point $T$ du cercle : c’est la définition de la tangente en $T$. Tous ses autres points sont à l’extérieur du cercle, comme $P$, à la distance $\sqrt{50} > 5$.

**Réponse.** a) $OT = 5$ · b) $OT^2 + TP^2 = 25 + 25 = 50 = OP^2$ · c) $(TP)$ est perpendiculaire au rayon $[OT]$ en $T$.

## Correction de l’exercice 11 – Cercle tangent à un axe

Un cercle est tangent à une droite quand son rayon est égal à la distance du centre à cette droite.

La distance de $\Omega(4\,;-3)$ à l’axe des abscisses est l’écart des ordonnées, $|-3| = 3$ : le premier cercle a pour rayon 3 et touche l’axe en $(4\,;0)$, le pied de la perpendiculaire.

La distance à l’axe des ordonnées est $|4| = 4$ : le second cercle a pour rayon 4 et touche l’axe en $(0\,;-3)$.

$$r_1 = |y_\Omega| = 3 \qquad r_2 = |x_\Omega| = 4$$

Un cercle de ce centre ne peut pas être tangent aux deux axes à la fois, car $3 \neq 4$. Le cercle de même centre passant par l’origine aurait pour rayon $\sqrt{16+9} = 5$.

**Réponse.** Rayon 3 (tangent en $(4\,;0)$), puis rayon 4 (tangent en $(0\,;-3)$).

## Correction de l’exercice 12 – Trouver un rayon

Le cercle coupe l’axe des abscisses en deux points quand la distance du centre à l’axe est strictement inférieure au rayon. Cette distance vaut $|4| = 4$ :

$$r > 4$$

Pour $r = 4$, le cercle est tangent à l’axe en $(3\,;0)$ ; pour $r < 4$, il ne le rencontre pas.

**Vérification** pour $r = 5$ : un point $M(x\,;0)$ est sur le cercle si $(x-3)^2 + 16 = 25$, soit $(x-3)^2 = 9$, donc $x = 0$ ou $x = 6$. Le cercle coupe bien l’axe en $(0\,;0)$ et $(6\,;0)$, et la corde mesure 6.

**Réponse.** $r > 4$ (tangence pour $r = 4$, aucun point pour $r < 4$).

## Correction de l’exercice 13 – Aire d’un disque et distance

Chaque antenne couvre un disque de rayon 8 km. Deux disques se chevauchent quand la distance des centres est inférieure à la somme des rayons :

$$AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13 < 8 + 8 = 16$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Les zones se chevauchent.

Le point $P$ est couvert par une antenne s'il est à moins de 8 km d'elle : $AP = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} \approx 6{,}32$ km et $BP = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} \approx 6{,}71$ km. Les deux distances sont inférieures à 8 : $P$ est couvert par les deux antennes, il est dans la zone de recouvrement.

**Réponse.** Oui, $13 < 16$ : les zones se chevauchent, et $P$ est couvert par les deux (6,325 et 6,708 km).

## Correction de l'exercice 14 – Cercle et symétrie

Une symétrie conserve les distances : l'image d'un cercle est un cercle de **même rayon**, 4, dont le centre est l'image de $\Omega$.

— Par la symétrie de centre $O$, on change les signes des deux coordonnées : le centre devient $(-3\,;-1)$.
— Par la symétrie d'axe l'axe des abscisses, on garde l'abscisse et on change le signe de l'ordonnée : le centre devient $(3\,;-1)$.

$$\Omega(3\,;1) \mapsto (-3\,;-1) \qquad \Omega(3\,;1) \mapsto (3\,;-1)$$

Les deux cercles images ne sont pas confondus. Leurs centres sont distants de $6 < 4+4$ : ils sont sécants.

**Réponse.** Centre $(-3\,;-1)$ et rayon 4 ; puis centre $(3\,;-1)$ et rayon 4.

## Correction de l'exercice 15 – Points de l'axe à une distance donnée

Un point de l'axe des abscisses s'écrit $M(x\,;0)$. On traduit $AM = 5$ par $AM^2 = 25$, ce qui évite la racine :

$$(x-2)^2 + (0-4)^2 = 25 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow x-2 = 3 \text{ ou } x-2 = -3$$

Donc $x = 5$ ou $x = -1$ : les points cherchés sont $M_1(-1\,;0)$ et $M_2(5\,;0)$.

Ce sont les points d'intersection de l'axe avec le cercle de centre $A$ et de rayon 5. Ils sont symétriques par rapport à $x = 2$, l'abscisse de $A$. **Vérification** : $AM_2 = \sqrt{9+16} = 5$.

**Réponse.** $M_1(-1\,;0)$ et $M_2(5\,;0)$.

## Correction de l'exercice 16 – Synthèse : deux cercles et une droite

a) La distance des centres vaut $|7-2| = 5$, plus grande que la somme des rayons, 4 : les cercles sont **disjoints**, extérieurs l'un à l'autre.

b) La droite $y = 3$ passe par le centre $\Omega_1$ : elle coupe $C_1$ aux extrémités d'un diamètre horizontal, à 2 de part et d'autre du centre, en $(0\,;3)$ et $(4\,;3)$.

c) La droite $x = 2$ passe aussi par le centre : les points de $C_1$ d'abscisse 2 sont à 2 au-dessus et au-dessous, $(2\,;1)$ et $T(2\,;5)$. Le rayon $[\Omega_1 T]$ est vertical ; la tangente en $T$, perpendiculaire au rayon, est horizontale :

$$y = 5$$

La distance de $\Omega_2(7\,;3)$ à cette droite vaut $|5-3| = 2 = r_2$ : elle est aussi tangente à $C_2$, en $(7\,;5)$.

**Réponse.** a) disjoints $(5 > 4)$ · b) $(0\,;3)$ et $(4\,;3)$ · c) $(2\,;1)$ et $T(2\,;5)$ ; tangente $y = 5$, tangente aussi à $C_2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).