

## Plaquette 2 – Distances et médiatrices : calculer et démontrer

### Géométrie repérée — Seconde

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

**Distance entre deux points.** Dans un repère **orthonormé** :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

**Réflexe essentiel.** Pour comparer des longueurs, on compare leurs **carrés** : c'est équivalent (les longueurs étant positives) et il n'y a plus de racine à manipuler.

| Ce qu'on cherche            | Ce qu'on calcule                 |
|-----------------------------|----------------------------------|
| triangle isocèle            | deux carrés égaux                |
| triangle équilatéral        | trois carrés égaux               |
| triangle rectangle          | $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (Pythagore) |
| point équidistant de A et B | $MA^2 = MB^2$                    |

**Milieu d'un segment.**

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

**Médiatrice de [AB].** C'est l'ensemble des points  $M$  tels que  $MA = MB$ . Elle passe par le milieu de [AB] et lui est perpendiculaire. Pour en trouver l'équation, on écrit  $MA^2 = MB^2$  avec  $M(x; y)$  et l'on simplifie : les  $x^2$  et  $y^2$  **disparaissent**, il reste une équation de droite.

**Cercle de centre  $\Omega(a; b)$  et de rayon  $r$ .**

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Un point est **sur** le cercle si l'égalité est vérifiée, **à l'intérieur** si le membre de gauche est plus petit, **à l'extérieur** s'il est plus grand.

**Cercle circonscrit à un triangle.** Son centre est le point équidistant des trois sommets : on l'obtient en intersectant deux médiatrices.

#### Correction de l'exercice 1 – Comparer trois distances

- **Calcul de  $AB^2$**  :  $(4 + 2)^2 + (1 - 3)^2 = 36 + 4 = 40$  ✓
- **Calcul de  $AC^2$**  :  $(2 + 2)^2 + (-3 - 3)^2 = 16 + 36 = 52$  ✓
- **Calcul de  $BC^2$**  :  $(2 - 4)^2 + (-3 - 1)^2 = 4 + 16 = 20$  ✓
- **Comparaison** : les trois carrés sont distincts ✓
- **Donc** : le triangle n'est **pas isocèle** ✓
- **Test de Pythagore** : le plus grand carré est  $AC^2 = 52$  ✓
- **Somme des deux autres** :  $40 + 20 = 60$  ✓
- **Verdict** :  $60 \neq 52$ , le triangle **n'est pas rectangle** ✓
- **Nature** : un triangle **quelconque** ✓
- **Longueurs** :  $AB = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6,325$  ✓

- **Longueur  $AC$**  :  $\sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7,211$  ✓
- **Longueur  $BC$**  :  $\sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,472$  ✓
- **Inégalité triangulaire** :  $7,211 < 6,325 + 4,472 = 10,797$  ✓
- **Aire par le déterminant** :  $\overrightarrow{AB} = (6; -2)$  et  $\overrightarrow{AC} = (4; -6)$  ✓
- **Déterminant** :  $6 \times (-6) - 4 \times (-2) = -36 + 8 = -28$  ✓
- **Aire** :  $\frac{28}{2} = 14$  ✓

**Réponse.**  $AB^2 = 40$ ,  $AC^2 = 52$ ,  $BC^2 = 20$  : triangle quelconque (d'aire 14).

### Correction de l'exercice 2 - Triangle isocèle

- **Calcul de  $AB^2$**  :  $(7 - 1)^2 + (4 - 2)^2 = 36 + 4 = 40$  ✓
- **Calcul de  $AC^2$**  :  $(3 - 1)^2 + (8 - 2)^2 = 4 + 36 = 40$  ✓
- **Calcul de  $BC^2$**  :  $(3 - 7)^2 + (8 - 4)^2 = 16 + 16 = 32$  ✓
- **Égalité** :  $AB^2 = AC^2 = 40$  ✓
- **Conclusion** :  $AB = AC$ , le triangle est **isocèle en A** ✓
- **Longueur des côtés égaux** :  $\sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6,325$  ✓
- **Base** :  $BC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5,657$  ✓
- **Test du rectangle** :  $32 \neq 40 + 40 = 80$ , et  $40 \neq 40 + 32$  ✓
- **Conclusion** : il n'est pas rectangle ✓
- **Test de l'équilatéral** :  $32 \neq 40$ , donc non ✓
- **Milieu de  $[BC]$**  :  $I = (5; 6)$  ✓
- **Propriété** :  $(AI)$  est à la fois médiane, hauteur et médiatrice de  $[BC]$  ✓
- **Longueur  $AI$**  :  $\sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2} \approx 5,657$  ✓
- **Contrôle par Pythagore dans le demi-triangle** :  $AI^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = 32 + 8 = 40 = AB^2$  ✓
- **Aire** :  $\frac{BC \times AI}{2} = \frac{4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{2} = \frac{32}{2} = 16$  ✓

**Réponse.**  $AB^2 = AC^2 = 40$  : le triangle est isocèle en A (aire 16).

### Correction de l'exercice 3 - Triangle rectangle

- **Calcul de  $AB^2$**  :  $(3 + 1)^2 + (1 + 1)^2 = 16 + 4 = 20$  ✓
- **Calcul de  $BC^2$**  :  $(1 - 3)^2 + (5 - 1)^2 = 4 + 16 = 20$  ✓
- **Calcul de  $AC^2$**  :  $(1 + 1)^2 + (5 + 1)^2 = 4 + 36 = 40$  ✓
- **Plus grand carré** :  $AC^2 = 40$  ✓
- **Somme des deux autres** :  $20 + 20 = 40$  ✓
- **Égalité de Pythagore** :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

- **Conclusion** : le triangle est **rectangle en B** ✓
- **Précision supplémentaire** :  $AB^2 = BC^2$ , donc il est aussi **isocèle en B** ✓
- **Nature complète** : rectangle isocèle en B ✓
- **Longueurs** :  $AB = BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,472$  ✓
- **Hypoténuse** :  $AC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6,325$  ✓
- **Aire** :

$$A = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

- **Contrôle par le déterminant** :  $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$  et  $\overrightarrow{AC} = (2; 6)$  ✓
- **Déterminant** :  $4 \times 6 - 2 \times 2 = 24 - 4 = 20$ , soit une aire de 10 ✓
- **Contrôle de perpendicularité** :  $\overrightarrow{BA} = (-4; -2)$  et  $\overrightarrow{BC} = (-2; 4)$ , et  $8 - 8 = 0$  ✓

**Réponse.**  $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$  : rectangle isocèle en B, d'aire 10.

### Correction de l'exercice 4 - Équation d'une médiatrice

- **Principe** :  $M(x; y)$  est sur la médiatrice si et seulement si  $MA^2 = MB^2$  ✓
- **Calcul de  $MA^2$**  :  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2$  ✓
- **Développement** :  $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5$  ✓
- **Calcul de  $MB^2$**  :  $(x - 5)^2 + (y - 4)^2$  ✓
- **Développement** :  $x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2 - 10x - 8y + 41$  ✓
- **Équation** : les  $x^2$  et  $y^2$  s'éliminent ✓
- **Il reste** :  $2x - 4y + 5 = -10x - 8y + 41$  ✓
- **Réorganisation** :  $12x + 4y - 36 = 0$  ✓
- **Simplification par 4** :  

$$3x + y - 9 = 0 \quad \text{soit} \quad y = -3x + 9$$
- **Contrôle par le milieu** :  $I = (2; 3)$  ✓
- **Vérification** :  $3 \times 2 + 3 - 9 = 0$  ✓
- **Contrôle par la perpendicularité** :  $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$ , de pente  $\frac{1}{3}$  ✓
- **Pente de la médiatrice** :  $-3$  ✓
- **Produit des pentes** :  $\frac{1}{3} \times (-3) = -1$  ✓
- **Cohérence** : les droites sont bien perpendiculaires ✓
- **Vérification sur un point** :  $M(1; 6)$  vérifie l'équation, et  $MA^2 = 4 + 16 = 20$  contre  $MB^2 = 16 + 4 = 20$  ✓

**Réponse.**  $y = -3x + 9$  (ou  $3x + y - 9 = 0$ ).

### Correction de l'exercice 5 - Point équidistant sur un axe

- **Forme du point** :  $M(0; y)$  ✓
- **Calcul de  $MA^2$**  :  $(2 - 0)^2 + (6 - y)^2 = 4 + 36 - 12y + y^2$  ✓
- **Simplification** :  $y^2 - 12y + 40$  ✓
- **Calcul de  $MB^2$**  :  $(8 - 0)^2 + (2 - y)^2 = 64 + 4 - 4y + y^2$  ✓
- **Simplification** :  $y^2 - 4y + 68$  ✓
- **Équation** :  $y^2 - 12y + 40 = y^2 - 4y + 68$  ✓
- **Les  $y^2$  s'éliminent** :  $-12y + 40 = -4y + 68$  ✓
- **Résolution** :  $-8y = 28$ , donc  $y = -3,5$  ✓
- **Donc** :  

$$M(0; -3,5)$$
- **Vérification de  $MA^2$**  :  $4 + (6 + 3,5)^2 = 4 + 90,25 = 94,25$  ✓
- **Vérification de  $MB^2$**  :  $64 + (2 + 3,5)^2 = 64 + 30,25 = 94,25$  ✓
- **Contrôle** : les deux carrés sont égaux ✓

- **Distance commune** :  $\sqrt{94,25} \approx 9,708$  ✓
- **Interprétation** :  $M$  est l'intersection de la médiatrice de  $[AB]$  avec l'axe des ordonnées ✓
- **Contrôle par l'équation de la médiatrice** : le milieu est  $(5; 4)$  et la pente de  $\overline{AB}(6; -4)$  vaut  $-\frac{2}{3}$  ✓
- **Pente de la médiatrice** :  $\frac{3}{2}$ , d'où  $y = \frac{3}{2}(x - 5) + 4 = \frac{3}{2}x - 3,5$  ✓
- **Contrôle en  $x = 0$**  :  $y = -3,5$  ✓

**Réponse.**  $M(0; -3,5)$ .

### Correction de l'exercice 6 - Équation de cercle par le centre et le rayon

- **Forme générale** :  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  ✓
- **Équation** :  

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$$
- **Test de  $A(7; 1)$**  :  $(7 - 3)^2 + (1 + 2)^2 = 16 + 9 = 25$  ✓
- **Conclusion** :  $A$  est **sur** le cercle ✓
- **Test de  $B(0; 0)$**  :  $(0 - 3)^2 + (0 + 2)^2 = 9 + 4 = 13$  ✓
- **Comparaison** :  $13 < 25$  ✓
- **Conclusion** :  $B$  est **à l'intérieur** du cercle ✓
- **Distance  $\Omega B$**  :  $\sqrt{13} \approx 3,606 < 5$  ✓
- **Distance  $\Omega A$**  :  $\sqrt{25} = 5$  ✓
- **Forme développée** :  $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 25$  ✓
- **Soit** :  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$  ✓
- **Contrôle en  $A$**  :  $49 + 1 - 42 + 4 - 12 = 0$  ✓
- **Contrôle en  $B$**  :  $0 + 0 - 0 + 0 - 12 = -12 < 0$ , ce qui confirme l'intérieur ✓
- **Un point extérieur** :  $C(10; 0)$  donne  $(7)^2 + (2)^2 = 53 > 25$  ✓
- **Distance** :  $\sqrt{53} \approx 7,280 > 5$  ✓
- **Points d'intersection avec l'axe des abscisses** :  $(x - 3)^2 + 4 = 25$ , donc  $x - 3 = \pm\sqrt{21}$  ✓

**Réponse.**  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$  ;  $A$  est sur le cercle,  $B$  à l'intérieur.

### Correction de l'exercice 7 - Cercle de diamètre donné

- **Centre** : milieu de  $[AB]$  ✓
- **Calcul** :  $\Omega\left(\frac{-2+6}{2}; \frac{1+7}{2}\right) = (2; 4)$  ✓
- **Diamètre** :  $AB = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$  ✓
- **Rayon** :  $5$  ✓
- **Équation** :  

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$$
- **Test de  $C(6; 1)$**  :  $(6 - 2)^2 + (1 - 4)^2 = 16 + 9 = 25$  ✓
- **Conclusion** :  $C$  est **sur** le cercle ✓
- **Conséquence géométrique** : le triangle  $ABC$  est **rectangle en  $C$**  ✓
- **Vérification par Pythagore** :  $CA^2 = 64 + 0 = 64$  ✓
- **Puis** :  $CB^2 = 0 + 36 = 36$  ✓

- **Somme** :  $64 + 36 = 100 = AB^2$  ✓
- **Cohérence** : le théorème du cercle de diamètre est confirmé ✓
- **Contrôle du centre** :  $\Omega A = \sqrt{16 + 9} = 5$  ✓
- **Contrôle** :  $\Omega B = \sqrt{16 + 9} = 5$  ✓
- **Aire du triangle**  $ABC$  :  $\frac{8 \times 6}{2} = 24$  ✓
- **Autre point du cercle** :  $(-2; 7)$ , car  $16 + 9 = 25$  ✓

**Réponse.**  $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$ , et  $C$  est sur le cercle (donc  $ABC$  est rectangle en  $C$ ).

### Correction de l'exercice 8 - Reconnaître un cercle sous forme développée

- **Stratégie** : regrouper et compléter les carrés ✓
- **Regroupement en  $x$**  :  $x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$  ✓
- **Regroupement en  $y$**  :  $y^2 + 6y = (y + 3)^2 - 9$  ✓
- **Substitution** :  $(x - 4)^2 - 16 + (y + 3)^2 - 9 - 11 = 0$  ✓
- **Simplification** :  $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 - 36 = 0$  ✓
- **Forme canonique** :

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 36$$

- **Conclusion** : c'est bien un cercle ✓
- **Centre** :  $\Omega(4; -3)$  ✓
- **Rayon** :  $\sqrt{36} = 6$  ✓
- **Contrôle des constantes** :  $-16 - 9 - 11 = -36$  ✓
- **Test d'un point** :  $(10; -3)$  donne  $36 + 0 = 36$  ✓
- **Autre point** :  $(4; 3)$  donne  $0 + 36 = 36$  ✓
- **Contrôle de cohérence** : ces deux points sont bien à distance 6 du centre ✓
- **Cas où ce ne serait pas un cercle** : si la constante finale était **négative**, comme dans  $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = -4$  ✓
- **Cas limite** : une constante nulle donne un seul point, le centre ✓
- **Exemple** :  $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 25 = 0$  se réduit à  $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 0$ , soit le point  $(4; -3)$  ✓

**Réponse.**  $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 36$  : centre  $\Omega(4; -3)$  et rayon 6.

### Correction de l'exercice 9 - Position relative d'un point et d'un cercle

- **Centre** :  $\Omega(-1; 3)$  ✓
- **Rayon** :  $\sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,472$  ✓
- **Test de  $P(3; 5)$**  :  $(3 + 1)^2 + (5 - 3)^2 = 16 + 4 = 20$  ✓
- **Conclusion** :  $P$  est **sur** le cercle ✓
- **Test de  $Q(2; 2)$**  :  $(2 + 1)^2 + (2 - 3)^2 = 9 + 1 = 10$  ✓
- **Comparaison** :  $10 < 20$  ✓
- **Conclusion** :  $Q$  est **à l'intérieur** ✓
- **Test de  $R(5; 7)$**  :  $(5 + 1)^2 + (7 - 3)^2 = 36 + 16 = 52$  ✓
- **Comparaison** :  $52 > 20$  ✓
- **Conclusion** :  $R$  est **à l'extérieur** ✓
- **Distances au centre** :  $\Omega P = \sqrt{20} \approx 4,472$  ✓
- **Puis** :  $\Omega Q = \sqrt{10} \approx 3,162$  ✓

- **Puis** :  $\Omega R = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7,211 \checkmark$
- **Classement** :  $\Omega Q < \Omega P < \Omega R \checkmark$
- **Point diamétralement opposé à P** :  $(2 \times (-1) - 3; 2 \times 3 - 5) = (-5; 1) \checkmark$
- **Contrôle** :  $(-5 + 1)^2 + (1 - 3)^2 = 16 + 4 = 20 \checkmark$

**Réponse.**  $P$  sur le cercle (20),  $Q$  à l'intérieur (10),  $R$  à l'extérieur (52).

### Correction de l'exercice 10 - Cercle circonscrit

- **Test de l'angle droit** :  $\overrightarrow{AB} = (6; 0)$  et  $\overrightarrow{AC} = (0; 8) \checkmark$
- **Produit** :  $6 \times 0 + 0 \times 8 = 0 \checkmark$
- **Conclusion** : le triangle est **rectangle en A**  $\checkmark$
- **Propriété clé** : le centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle est le **milieu de l'hypoténuse**  $\checkmark$
- **Hypoténuse** :  $[BC] \checkmark$
- **Centre** :

$$\Omega\left(\frac{6+0}{2}; \frac{0+8}{2}\right) = (3; 4)$$

- **Longueur BC** :  $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \checkmark$
- **Rayon** :  $\frac{10}{2} = 5 \checkmark$
- **Contrôle** :  $\Omega A = \sqrt{9 + 16} = 5 \checkmark$
- **Contrôle** :  $\Omega B = \sqrt{9 + 16} = 5 \checkmark$
- **Contrôle** :  $\Omega C = \sqrt{9 + 16} = 5 \checkmark$
- **Cohérence** : les trois sommets sont bien à distance 5  $\checkmark$
- **Équation du cercle** :  $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25 \checkmark$
- **Méthode générale, par les médiatrices** : celle de  $[AB]$  est  $x = 3$ , celle de  $[AC]$  est  $y = 4 \checkmark$
- **Intersection** : le point  $(3; 4) \checkmark$
- **Aire du triangle** :  $\frac{6 \times 8}{2} = 24 \checkmark$

**Réponse.** Centre  $\Omega(3; 4)$  (milieu de l'hypoténuse) et rayon 5.

### Correction de l'exercice 11 - Deux médiatrices pour un centre

- **Médiatrice de  $[AB]$**  : on écrit  $MA^2 = MB^2 \checkmark$
- **Développement** :  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (x - 7)^2 + (y - 3)^2 \checkmark$
- **Après élimination des carrés** :  $-2x + 1 - 2y + 1 = -14x + 49 - 6y + 9 \checkmark$
- **Réorganisation** :  $12x + 4y - 56 = 0$ , soit  $3x + y - 14 = 0 \checkmark$
- **Contrôle par le milieu de  $[AB]$**  :  $(4; 2)$ , et  $12 + 2 - 14 = 0 \checkmark$
- **Médiatrice de  $[AC]$**  :  $MA^2 = MC^2 \checkmark$
- **Développement** :  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (x - 3)^2 + (y - 7)^2 \checkmark$
- **Après élimination** :  $-2x + 1 - 2y + 1 = -6x + 9 - 14y + 49 \checkmark$
- **Réorganisation** :  $4x + 12y - 56 = 0$ , soit  $x + 3y - 14 = 0 \checkmark$
- **Contrôle par le milieu de  $[AC]$**  :  $(2; 4)$ , et  $2 + 12 - 14 = 0 \checkmark$
- **Système** :  $3x + y = 14$  et  $x + 3y = 14 \checkmark$
- **Résolution par soustraction** :  $2x - 2y = 0$ , donc  $x = y \checkmark$
- **Substitution** :  $4x = 14$ , donc  $x = 3,5 \checkmark$
- **Centre** :

$$\Omega(3,5;3,5)$$

- **Rayon** :  $\Omega A = \sqrt{6,25 + 6,25} = \sqrt{12,5} \approx 3,536 \checkmark$
- **Contrôle** :  $\Omega B = \sqrt{12,25 + 0,25} = \sqrt{12,5} \checkmark$
- **Contrôle** :  $\Omega C = \sqrt{0,25 + 12,25} = \sqrt{12,5} \checkmark$

**Réponse.**  $\Omega(3,5;3,5)$  et rayon  $\sqrt{12,5} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,536$ .

### Correction de l'exercice 12 - Distance d'un point à une droite horizontale

- **Distance à une droite horizontale** : c'est l'écart des ordonnées  $\checkmark$
- **Calcul** :  $|7 - 2| = 5 \checkmark$
- **Point le plus proche** :  $(4; 2)$ , projeté orthogonal de  $A \checkmark$
- **Distance à une droite verticale** : c'est l'écart des abscisses  $\checkmark$
- **Calcul** :  $|4 - (-1)| = 5 \checkmark$
- **Point le plus proche** :  $(-1; 7) \checkmark$
- **Coïncidence** : les deux distances valent 5  $\checkmark$
- **Distance à l'origine** :

$$OA = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65} \approx 8,062$$

- **Contrôle d'ordre** :  $\sqrt{65} > 5$ , la distance à un point est plus grande qu'à une droite qui en est proche  $\checkmark$
- **Cercle de centre  $A$  tangent à  $y = 2$**  : son rayon vaut 5  $\checkmark$
- **Équation** :  $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 25 \checkmark$
- **Point de tangence** :  $(4; 2) \checkmark$
- **Contrôle** :  $0 + 25 = 25 \checkmark$
- **Ce cercle coupe-t-il  $x = -1$  ?** La distance à cette droite vaut aussi 5, donc il est tangent  $\checkmark$
- **Point de tangence** :  $(-1; 7) \checkmark$
- **Contrôle** :  $25 + 0 = 25 \checkmark$

**Réponse.** 5 dans les deux cas, et  $OA = \sqrt{65} \approx 8,062$ .

### Correction de l'exercice 13 - Losange et distances

- **Vecteur  $\overrightarrow{AB}$**  :  $(5; 12) \checkmark$
- **Vecteur  $\overrightarrow{DC}$**  :  $(18 - 13; 12 - 0) = (5; 12) \checkmark$
- **Égalité** :  $ABCD$  est un **parallélogramme**  $\checkmark$
- **Longueur  $AB$**  :  $\sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \checkmark$
- **Longueur  $AD$**  :  $\sqrt{169 + 0} = 13 \checkmark$
- **Égalité** :  $AB = AD = 13 \checkmark$
- **Conclusion** :  $ABCD$  est un **losange** de côté 13  $\checkmark$
- **Périmètre** :  $4 \times 13 = 52 \checkmark$
- **Diagonales** :  $\overrightarrow{AC} = (18; 12)$  et  $\overrightarrow{BD} = (8; -12) \checkmark$
- **Longueurs** :  $AC = \sqrt{324 + 144} = \sqrt{468} = 6\sqrt{13} \approx 21,633 \checkmark$
- **Et** :  $BD = \sqrt{64 + 144} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13} \approx 14,422 \checkmark$
- **Perpendicularité** :  $18 \times 8 + 12 \times (-12) = 144 - 144 = 0 \checkmark$
- **Cohérence** : dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires  $\checkmark$
- **Aire par les diagonales** :

$$A = \frac{6\sqrt{13} \times 4\sqrt{13}}{2} = \frac{24 \times 13}{2} = 156$$

- **Contrôle par base et hauteur** : base  $AD = 13$  et hauteur 12, donc  $13 \times 12 = 156$  ✓
- **Contrôle par le déterminant** :  $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = 5 \times 0 - 13 \times 12 = -156$  ✓

**Réponse.** Un losange de côté 13, d'aire 156.

### Correction de l'exercice 14 - Intersection d'un cercle et d'un axe

- **Équation du cercle** :  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$  ✓
- **Distance du centre à l'axe des abscisses** :  $|2| = 2$  ✓
- **Comparaison au rayon** :  $2 < 5$  ✓
- **Conclusion** : le cercle **coupe** l'axe en deux points ✓
- **Recherche des points** : on pose  $y = 0$  ✓
- **Équation** :  $(x - 3)^2 + 4 = 25$  ✓
- **Donc** :  $(x - 3)^2 = 21$  ✓
- **Solutions** :  $x - 3 = \pm\sqrt{21}$  ✓
- **Points d'intersection** :  

$$(3 - \sqrt{21}; 0) \quad \text{et} \quad (3 + \sqrt{21}; 0)$$
- **Valeurs approchées** :  $\sqrt{21} \approx 4,583$ , donc  $(-1,583; 0)$  et  $(7,583; 0)$  ✓
- **Longueur de la corde** :  $2\sqrt{21} \approx 9,165$  ✓
- **Contrôle par Pythagore** : la demi-corde vérifie  $5^2 - 2^2 = 21$  ✓
- **Intersection avec l'axe des ordonnées** : on pose  $x = 0$  ✓
- **Équation** :  $9 + (y - 2)^2 = 25$ , donc  $(y - 2)^2 = 16$  ✓
- **Solutions** :  $y = -2$  ou  $y = 6$  ✓
- **Longueur de cette corde** : 8 ✓
- **Cohérence** : la distance du centre à l'axe des ordonnées vaut 3, et  $\sqrt{25 - 9} = 4$  est la demi-corde ✓

**Réponse.** Oui :  $(3 - \sqrt{21}; 0) \approx (-1,583; 0)$  et  $(3 + \sqrt{21}; 0) \approx (7,583; 0)$ .

### Correction de l'exercice 15 - Le point le plus proche

- **Calcul de  $MA^2$**  :  $(1 - 4)^2 + (1 - 3)^2 = 9 + 4 = 13$  ✓
- **Calcul de  $MB^2$**  :  $(9 - 4)^2 + (1 - 3)^2 = 25 + 4 = 29$  ✓
- **Calcul de  $MC^2$**  :  $(5 - 4)^2 + (7 - 3)^2 = 1 + 16 = 17$  ✓
- **Classement des carrés** :  $13 < 17 < 29$  ✓
- **Conclusion** : le sommet le plus proche est A ✓
- **Distances** :  $MA = \sqrt{13} \approx 3,606$  ✓
- **Puis** :  $MC = \sqrt{17} \approx 4,123$  ✓
- **Puis** :  $MB = \sqrt{29} \approx 5,385$  ✓
- **Avantage de la méthode** : comparer les carrés suffit, aucune racine n'est nécessaire ✓
- **Justification** : la fonction racine carrée est **croissante** sur  $[0; +\infty[$  ✓
- **M est-il à l'intérieur du triangle ?** Aire de  $ABC$  : base 8, hauteur 6, soit 24 ✓
- **Aire de  $MAB$**  : base  $AB = 8$ , hauteur  $|3 - 1| = 2$ , soit 8 ✓
- **Aire de  $MAC$**  :  $\overrightarrow{MA} = (-3; -2)$  et  $\overrightarrow{MC} = (1; 4)$ , de déterminant  $-12 + 2 = -10$ , soit 5 ✓

- **Aire de  $MBC$**  :  $\overrightarrow{MB} = (5; -2)$  et  $\overrightarrow{MC} = (1; 4)$ , de déterminant  $20 + 2 = 22$ , soit 11 ✓
- **Somme** :  $8 + 5 + 11 = 24$  ✓
- **Conclusion** :  $M$  est bien à l'intérieur du triangle ✓

**Réponse.**  $A$ , avec  $MA^2 = 13$  (contre 17 pour  $C$  et 29 pour  $B$ ).

### Correction de l'exercice 16 - Synthèse : triangle, cercle et médiatrices

- a) **Calcul de  $AB^2$**  :  $(5 + 3)^2 + (-2 - 2)^2 = 64 + 16 = 80$  ✓
- **Calcul de  $AC^2$**  :  $(5 + 3)^2 + (6 - 2)^2 = 64 + 16 = 80$  ✓
  - **Calcul de  $BC^2$**  :  $(5 - 5)^2 + (6 + 2)^2 = 0 + 64 = 64$  ✓
  - **Égalité** :  $AB^2 = AC^2 = 80$ , le triangle est **isocèle en  $A$**  ✓
  - **Test de Pythagore** : le plus grand carré est 80, et  $80 + 64 = 144 \neq 80$  ✓
  - **Autre test** :  $64 \neq 80 + 80$  ✓
  - **Conclusion** : il n'est pas rectangle ✓
  - **Nature** : isocèle en  $A$ , non rectangle ✓
- b) **Base** :  $BC = \sqrt{64} = 8$ , portée par la droite verticale  $x = 5$  ✓
- **Hauteur issue de  $A$**  : la distance de  $A$  à cette droite, soit  $|5 - (-3)| = 8$  ✓
  - **Aire** :

$$A = \frac{8 \times 8}{2} = 32$$

- **Contrôle par le déterminant** :  $\overrightarrow{AB} = (8; -4)$  et  $\overrightarrow{AC} = (8; 4)$  ✓
  - **Déterminant** :  $8 \times 4 - 8 \times (-4) = 32 + 32 = 64$ , soit une aire de 32 ✓
  - **Côtés égaux** :  $AB = AC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8,944$  ✓
  - **Périmètre** :  $2 \times 4\sqrt{5} + 8 = 8\sqrt{5} + 8 \approx 25,889$  ✓
- c) **Centre** : il est équidistant des trois sommets ✓
- **Médiatrice de  $[BC]$**  :  $[BC]$  étant vertical, sa médiatrice est **horizontale** ✓
  - **Milieu de  $[BC]$**  :  $(5; 2)$  ✓
  - **Équation** :  $y = 2$  ✓
  - **Le centre est donc de la forme  $\Omega(x; 2)$**  ✓
  - **Condition  $\Omega A = \Omega B$**  :  $(x + 3)^2 + 0 = (x - 5)^2 + 16$  ✓
  - **Développement** :  $x^2 + 6x + 9 = x^2 - 10x + 25 + 16$  ✓
  - **Résolution** :  $16x = 32$ , donc  $x = 2$  ✓
  - **Centre** :

$$\Omega(2; 2)$$

- **Rayon** :  $\Omega A = \sqrt{25 + 0} = 5$  ✓
  - **Contrôle** :  $\Omega B = \sqrt{9 + 16} = 5$  ✓
  - **Contrôle** :  $\Omega C = \sqrt{9 + 16} = 5$  ✓
  - **Équation du cercle** :  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$  ✓
- d) **Médiatrice de  $[BC]$**  : déjà trouvée,  $y = 2$  ✓
- **Démonstration par le calcul** :  $MB^2 = MC^2$  donne  $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = (x - 5)^2 + (y - 6)^2$  ✓
  - **Les  $(x - 5)^2$  s'éliminent** :  $y^2 + 4y + 4 = y^2 - 12y + 36$  ✓
  - **Résolution** :  $16y = 32$ , donc  $y = 2$  ✓
  - **Vérification pour le centre** :  $\Omega(2; 2)$  a bien pour ordonnée 2 ✓

- **Contrôle géométrique** :  $A$  est aussi sur cette médiatrice, puisque  $AB = AC$  ✓
- **Contrôle** : l'ordonnée de  $A$  vaut 2 ✓
- **Conséquence** :  $A$ ,  $\Omega$  et le milieu de  $[BC]$  sont alignés sur la droite  $y = 2$  ✓
- **Position de  $\Omega$  sur  $[A ; (5 ; 2)]$**  : de  $-3$  à  $5$ , le centre est en  $2$ , soit aux  $\frac{5}{8}$  du segment ✓

**Réponse.** a)  $AB^2 = AC^2 = 80$  et  $BC^2 = 64$  : isocèle en  $A$  · b) aire 32, périmètre  $8\sqrt{5} + 8 \approx 25,89$  · c)  $\Omega(2 ; 2)$ , rayon 5 · d)  $y = 2$ , qui contient bien  $\Omega$ .