Plaquette 2 – Distances et médiatrices : calculer et démontrer

Géométrie repérée — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Distance entre deux points. Dans un repère **orthonormé** :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \qquad AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Réflexe essentiel. Pour comparer des longueurs, on compare leurs **carrés** : c'est équivalent (les longueurs étant positives) et il n'y a plus de racine à manipuler.

Ce qu'on cherche	Ce qu'on calcule
triangle isocèle	deux carrés égaux
triangle équilatéral	trois carrés égaux
triangle rectangle	$AB^2 + AC^2 = BC^2$ (Pythagore)
point équidistant de A et B	$MA^2 = MB^2$

Milieu d'un segment.

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Médiatrice de $[AB]$**.** C'est l'ensemble des points M tels que $MA = MB$. Elle passe par le milieu de $[AB]$ et lui est perpendiculaire. Pour en trouver l'équation, on écrit $MA^2 = MB^2$ avec $M(x\,;y)$ et l'on simplifie : les x^2 et y^2 **disparaissent**, il reste une équation de droite.

Cercle de centre Ω **et de rayon** r**.** C'est l'ensemble des points situés à la distance r de Ω. Un point M est **sur** le cercle si $\Omega M^2 = r^2$, **à l'intérieur** si $\Omega M^2 < r^2$, **à l'extérieur** si $\Omega M^2 > r^2$.

Cercle circonscrit à un triangle. Son centre est le point équidistant des trois sommets : on l'obtient en intersectant deux médiatrices.

Correction de l'exercice 1 – Comparer trois distances

On calcule les carrés des longueurs avec la formule $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$, qui évite les racines :

$$AB^2 = 6^2 + (-2)^2 = 40 \qquad AC^2 = 4^2 + (-6)^2 = 52 \qquad BC^2 = (-2)^2 + (-4)^2 = 20$$

Les trois carrés sont distincts : le triangle n'est pas isocèle. Pour savoir s'il est rectangle, on compare le plus grand carré à la somme des deux autres : $40 + 20 = 60 \neq 52$. D'après le théorème de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle (s'il l'était, ce serait en B, opposé au plus grand côté).

C'est un triangle **quelconque**, de côtés $2\sqrt{10} \approx 6{,}32$, $2\sqrt{13} \approx 7{,}21$ et $2\sqrt{5} \approx 4{,}47$.

Réponse. $AB^2 = 40$, $AC^2 = 52$, $BC^2 = 20$: triangle quelconque.

Correction de l'exercice 2 – Triangle isocèle

On calcule les carrés des trois longueurs :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$AB^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \qquad AC^2 = 2^2 + 6^2 = 40 \qquad BC^2 = (-4)^2 + 4^2 = 32$$

$AB = AC = \sqrt{40}$: le triangle est **isocèle en** A, le sommet commun aux deux côtés égaux. Il n'est pas équilatéral ($32 \neq 40$), ni rectangle ($40 + 32 \neq 40$ et $40 + 40 \neq 32$).

Le milieu de la base $[BC]$ est $I(5\,;6)$. Dans un triangle isocèle, la droite (AI) est à la fois médiane et hauteur : $AI = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$, et l'aire vaut $\dfrac{BC \times AI}{2} = \dfrac{4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{2} = 16$.

Contrôle : $AI^2 + IB^2 = 32 + 8 = 40 = AB^2$.

Réponse. $AB^2 = AC^2 = 40$: le triangle est isocèle en A (aire 16).

Correction de l'exercice 3 – Triangle rectangle

On calcule les carrés des côtés : $AB^2 = 4^2 + 2^2 = 20$, $BC^2 = (-2)^2 + 4^2 = 20$ et $AC^2 = 2^2 + 6^2 = 40$. Le plus grand est AC^2, et

$$AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est **rectangle en** B, sommet opposé au plus grand côté. Comme $AB = BC$, il est même rectangle isocèle.

Son aire vaut la moitié du produit des côtés de l'angle droit : $\dfrac{AB \times BC}{2} = \dfrac{\sqrt{20} \times \sqrt{20}}{2} = 10$.

Réponse. $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$: rectangle isocèle en B, d'aire 10.

Correction de l'exercice 4 – Équation d'une médiatrice

Un point $M(x\,;y)$ est sur la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si $MA = MB$, c'est-à-dire $MA^2 = MB^2$:

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 5)^2 + (y - 4)^2$$

En développant, $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16$. Les termes x^2 et y^2 s'éliminent : $2x - 4y + 5 = -10x - 8y + 41$, soit $12x + 4y - 36 = 0$, et en divisant par 4 : $3x + y - 9 = 0$, c'est-à-dire $y = -3x + 9$.

Contrôle : le milieu de $[AB]$, $I(2\,;3)$, vérifie $3 \times 2 + 3 - 9 = 0$. Le point $M(1\,;6)$ aussi, et $MA^2 = 4 + 16 = 20 = 16 + 4 = MB^2$.

Réponse. $y = -3x + 9$ (ou $3x + y - 9 = 0$).

Correction de l'exercice 5 – Point équidistant sur un axe

Le point cherché est sur l'axe des ordonnées : $M(0\,;y)$. On écrit $MA^2 = MB^2$ pour éviter les racines :

$$2^2 + (6 - y)^2 = 8^2 + (2 - y)^2 \Leftrightarrow 4 + 36 - 12y + y^2 = 64 + 4 - 4y + y^2$$

Les y^2 s'éliminent : $40 - 12y = 68 - 4y$, soit $-8y = 28$ et $y = -3{,}5$. Donc $M(0\,;-3{,}5)$.

Vérification : $MA^2 = 4 + 9{,}5^2 = 94{,}25$ et $MB^2 = 64 + 5{,}5^2 = 94{,}25$. Le point M est l'intersection de la médiatrice de $[AB]$ avec l'axe des ordonnées.

Réponse. $M(0\,;-3{,}5)$.

Correction de l'exercice 6 – Un point sur un cercle ?

Le cercle de centre Ω et de rayon 5 est l'ensemble des points situés à la distance 5 de Ω. On compare donc chaque distance au centre avec le rayon, en passant par les carrés :

$$\Omega A^2 = (7 - 3)^2 + (1 + 2)^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

A est à la distance 5 de Ω : il est **sur** le cercle.

$\Omega B^2 = (0-3)^2 + (0+2)^2 = 9 + 4 = 13$, donc $\Omega B = \sqrt{13} \approx 3{,}61 < 5$: B est **à l'intérieur**. Un point comme $C(10\,;0)$, avec $\Omega C^2 = 49 + 4 = 53 > 25$, serait à l'extérieur.

Réponse. $\Omega A = 5$: A est sur le cercle ; $\Omega B = \sqrt{13} < 5$: B est à l'intérieur.

Correction de l'exercice 7 – Cercle de diamètre donné

Le centre du cercle de diamètre $[AB]$ est le milieu de $[AB]$:

$$\Omega\left(\frac{-2+6}{2}\,;\frac{1+7}{2}\right) = (2\,;4)$$

Le rayon est la moitié du diamètre : $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, donc $r = 5$. Pour C, on calcule $\Omega C^2 = (6-2)^2 + (1-4)^2 = 16 + 9 = 25$: $\Omega C = 5$, le point C est sur le cercle.

Un triangle inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre est rectangle : ABC est **rectangle en** C. **Contrôle** par Pythagore : $CA^2 + CB^2 = 64 + 36 = 100 = AB^2$.

Réponse. Centre $\Omega(2\,;4)$, rayon 5 ; C est sur le cercle, donc ABC est rectangle en C.

Correction de l'exercice 8 – Rayon d'un cercle passant par un point

a) Le rayon est la distance du centre à un point du cercle :
$r = \Omega A = \sqrt{(10-4)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{36} = 6$.

b) On compare les distances au centre avec 6, ou leurs carrés avec 36 :

$$\Omega B^2 = 0^2 + 6^2 = 36 \qquad \Omega C^2 = 4^2 + 4^2 = 32$$

B est à la distance 6 de Ω : il est sur le cercle. C est à la distance $\sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66 < 6$: il est à l'intérieur. Les points A et B sont faciles à contrôler : A est 6 unités à droite du centre, B 6 unités au-dessus.

Réponse. a) $r = 6$ · b) B est sur le cercle ; C est à l'intérieur ($\Omega C = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$).

Correction de l'exercice 9 – Position relative d'un point et d'un cercle

On compare le carré de la distance au centre avec le carré du rayon, $\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 20$:

$$\Omega P^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \qquad \Omega Q^2 = 3^2 + (-1)^2 = 10 \qquad \Omega R^2 = 6^2 + 4^2 = 52$$

P est à la distance exacte du rayon : il est **sur** le cercle. Q est plus près du centre ($10 < 20$) : il est **à l'intérieur**. R est plus loin ($52 > 20$) : il est **à l'extérieur**.

Comparer les carrés suffit, car les distances sont positives et la fonction carré conserve leur ordre.

Réponse. P sur le cercle ($\Omega P^2 = 20$), Q à l'intérieur (10), R à l'extérieur (52).

Correction de l'exercice 10 – Cercle circonscrit

Les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont portés par les axes, qui sont perpendiculaires : le triangle est **rectangle en** A. Or le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse : son centre est le milieu de $[BC]$.

$$\Omega\left(\frac{6+0}{2}\,;\frac{0+8}{2}\right) = (3\,;4) \qquad r = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{36+64}}{2} = 5$$

Contrôle : $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \sqrt{9+16} = 5$. On retrouve le centre par les médiatrices : celle de $[AB]$ est la droite $x = 3$, celle de $[AC]$ la droite $y = 4$, et elles se coupent en $(3\,;4)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Centre $\Omega(3\,;4)$ (milieu de l'hypoténuse) et rayon 5.

Correction de l'exercice 11 – Deux médiatrices pour un centre

Le centre du cercle circonscrit est équidistant des trois sommets : il est sur les médiatrices. Pour celle de $[AB]$, on écrit $MA^2 = MB^2$; les carrés x^2 et y^2 s'éliminent et il reste $12x + 4y - 56 = 0$, soit

$$3x + y = 14$$

De même, $MA^2 = MC^2$ donne $4x + 12y - 56 = 0$, soit $x + 3y = 14$. On écrit les deux équations réduites, $y = -3x + 14$ et $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{14}{3}$, et on cherche l'abscisse commune :

$$-3x + 14 = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3} \Leftrightarrow -9x + 42 = -x + 14 \Leftrightarrow 28 = 8x \Leftrightarrow x = 3{,}5$$

puis $y = -10{,}5 + 14 = 3{,}5$. Le centre est $\Omega(3{,}5\,;3{,}5)$.

Le rayon vaut $\Omega A = \sqrt{2{,}5^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{12{,}5} \approx 3{,}54$. **Contrôle** : $\Omega B^2 = 3{,}5^2 + 0{,}5^2 = 12{,}5$ et $\Omega C^2 = 0{,}5^2 + 3{,}5^2 = 12{,}5$.

Réponse. $\Omega(3{,}5\,;3{,}5)$ et rayon $\sqrt{12{,}5} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}536$.

Correction de l'exercice 12 – Distance d'un point à une droite horizontale

La distance d'un point à une droite est la longueur du segment perpendiculaire qui les joint. Pour une droite horizontale, ce segment est vertical : la distance est l'écart des ordonnées, $|7 - 2| = 5$, atteinte au point $(4\,;2)$.

Pour la droite verticale $x = -1$, c'est l'écart des abscisses : $|4 - (-1)| = 5$, atteinte au point $(-1\,;7)$.

$$OA = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} \approx 8{,}06$$

Le cercle de centre A et de rayon 5 touche donc chacune des deux droites en un seul point : il leur est **tangent**, en $(4\,;2)$ et en $(-1\,;7)$.

Réponse. 5 dans les deux cas, et $OA = \sqrt{65} \approx 8{,}062$.

Correction de l'exercice 13 – Losange et distances

On compare $\overrightarrow{AB}(5\,;12)$ et $\overrightarrow{DC}(18 - 13\,;12 - 0) = (5\,;12)$: ils sont égaux, donc $ABCD$ est un parallélogramme. Puis $AB = \sqrt{25 + 144} = 13$ et $AD = 13$: deux côtés consécutifs égaux, c'est un **losange** de côté 13.

Le côté $[AD]$ est sur l'axe des abscisses et le côté opposé $[BC]$ sur la droite $y = 12$: la hauteur du losange vaut 12.

$$A = AD \times h = 13 \times 12 = 156$$

Contrôle par les diagonales : $AC = \sqrt{324 + 144} = 6\sqrt{13}$ et $BD = \sqrt{64 + 144} = 4\sqrt{13}$, et $\dfrac{6\sqrt{13} \times 4\sqrt{13}}{2} = \dfrac{24 \times 13}{2} = 156$.

Réponse. Un losange de côté 13, d'aire 156.

Correction de l'exercice 14 – Intersection d'un cercle et d'un axe

La distance du centre $\Omega(3\,;2)$ à l'axe des abscisses vaut 2, inférieure au rayon 5 : le cercle coupe l'axe en deux points.

Un point $M(x\,;0)$ de l'axe est sur le cercle si et seulement si $\Omega M = 5$, soit $\Omega M^2 = 25$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$(x-3)^2+(0-2)^2=25 \Leftrightarrow (x-3)^2=21 \Leftrightarrow x-3=\sqrt{21} \text{ ou } x-3=-\sqrt{21}$$

Les points d'intersection sont $\left(3-\sqrt{21}\,;0\right)$ et $\left(3+\sqrt{21}\,;0\right)$, soit environ $(-1{,}58\,;0)$ et $(7{,}58\,;0)$. **Contrôle** : la corde mesure $2\sqrt{21}$, et sa moitié vérifie $\sqrt{21}^2+2^2=25=5^2$ (Pythagore).

Réponse. Oui : $\left(3-\sqrt{21}\,;0\right)\approx(-1{,}583\,;0)$ et $\left(3+\sqrt{21}\,;0\right)\approx(7{,}583\,;0)$.

Correction de l'exercice 15 – Le point le plus proche

On compare les carrés des distances, ce qui évite les racines :

$$MA^2=3^2+2^2=13 \qquad MB^2=5^2+2^2=29 \qquad MC^2=1^2+4^2=17$$

Comme $13<17<29$ et que les distances sont positives, leur ordre est le même : $MA<MC<MB$. Le sommet le plus proche de M est A, à $\sqrt{13}\approx 3{,}61$.

Comparer les carrés suffit : la fonction racine carrée est croissante, elle ne change pas l'ordre.

Réponse. A, avec $MA^2=13$ (contre 17 pour C et 29 pour B).

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : triangle, cercle et médiatrices

a) $AB^2=8^2+(-4)^2=80$, $AC^2=8^2+4^2=80$ et $BC^2=0^2+8^2=64$. Le triangle est isocèle en A ; il n'est pas rectangle ($64+80\neq 80$).

b) La base $[BC]$ est verticale (sur la droite $x=5$), de longueur 8 ; la hauteur issue de A est l'écart des abscisses, $5-(-3)=8$. Aire : $\dfrac{8\times 8}{2}=32$. Périmètre : $2\sqrt{80}+8=8\sqrt{5}+8\approx 25{,}89$.

c) Le centre Ω est sur la médiatrice de $[BC]$. Ce segment est vertical, de milieu $(5\,;2)$: sa médiatrice est la droite horizontale $y=2$, donc $\Omega(x\,;2)$. On écrit $\Omega A^2=\Omega B^2$:

$$(x+3)^2=(x-5)^2+16 \Leftrightarrow 6x+9=-10x+41 \Leftrightarrow x=2$$

d'où $\Omega(2\,;2)$ et $r=\Omega A=5$. **Contrôle** : $\Omega C^2=9+16=25$.

d) $MB^2=MC^2$ donne $(y+2)^2=(y-6)^2$, soit $16y=32$ et $y=2$: la médiatrice est $y=2$, et Ω y appartient. A aussi, puisque $AB=AC$.

Réponse. a) $AB^2=AC^2=80$ et $BC^2=64$: isocèle en A · b) aire 32, périmètre $8\sqrt{5}+8\approx 25{,}89$ · c) $\Omega(2\,;2)$, rayon 5 · d) $y=2$, qui contient bien Ω.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).