

Plaquette 1 - Distances, milieux et cercles dans un repère

Géométrie repérée — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes de la géométrie repérée.

- Le repère est **orthonormé** : axes perpendiculaires, même unité. C'est la condition pour utiliser la formule de la distance.
- Distance : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- Milieu de $[AB]$: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.
- **Cercle** de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r : l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\Omega M = r$, c'est-à-dire

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- Triangle rectangle : réciproque de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ donne l'angle droit en A.
- Triangle isocèle en A : $AB = AC$. Équilatéral : $AB = AC = BC$.
- Un point appartient à un cercle si ses coordonnées **vérifient** l'équation du cercle.

Correction de l'exercice 1 - Calculer une distance

On applique la formule du cours :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- $x_B - x_A = 6 - 2 = 4$ et $y_B - y_A = 2 - (-1) = 3$.
- $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$.
- La longueur est exacte : $AB = 5$ unités.

Piège. On soustrait les coordonnées **avant** d'élever au carré, et on n'oublie pas la double négation $2 - (-1) = 3$.

Réponse. $AB = 5$.

Correction de l'exercice 2 - Milieu et symétrie

a) Formule du milieu : $M\left(\frac{-4 + 2}{2}; \frac{3 + (-5)}{2}\right) = (-1; -1)$.

b) Dire que A' est le symétrique de A par rapport à B signifie que B est le **milieu** de $[AA']$.

- En notant $A'(x; y)$: $\frac{-4 + x}{2} = 2$ et $\frac{3 + y}{2} = -5$.
- Première équation : $-4 + x = 4$, donc $x = 8$.
- Seconde équation : $3 + y = -10$, donc $y = -13$.
- Vérification : le milieu de $[AA']$ est $\left(\frac{-4 + 8}{2}; \frac{3 - 13}{2}\right) = (2; -5) = B$. Correct.

Réponse. a) $M(-1; -1)$ · b) $A'(8; -13)$.

Correction de l'exercice 3 - Nature d'un triangle (isocèle)

- $AB = \sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$.
- $AC = \sqrt{(3-1)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$.
- $BC = \sqrt{(3-5)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$.
- On a $AB = BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$: le triangle est **isocèle en B**.
- Est-il rectangle ? On teste la réciproque de Pythagore avec le plus grand côté AC : $AC^2 = 40$ et $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40$. L'égalité est vérifiée !
- Le triangle ABC est donc **rectangle isocèle en B**.

Méthode. On garde les longueurs sous forme de racines carrées (ou de carrés) : les comparaisons sont exactes, sans arrondi.

Réponse. $AB = BC = 2\sqrt{5}$, $AC = 2\sqrt{10}$: triangle rectangle isocèle en B.

Correction de l'exercice 4 - Réciproque de Pythagore dans un repère

On calcule les **carrés** des longueurs, ce qui évite toute racine.

- $EF^2 = (1 - (-2))^2 + (4 - 0)^2 = 9 + 16 = 25$.
- $FG^2 = (5 - 1)^2 + (1 - 4)^2 = 16 + 9 = 25$.
- $EG^2 = (5 - (-2))^2 + (1 - 0)^2 = 49 + 1 = 50$.
- Le plus grand carré est $EG^2 = 50$, et $EF^2 + FG^2 = 25 + 25 = 50$.
- D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est **rectangle en F** (le sommet opposé au plus grand côté).
- De plus $EF = FG = 5$: il est aussi isocèle, donc rectangle isocèle en F.

Réponse. $EG^2 = EF^2 + FG^2 = 50$: triangle rectangle (et isocèle) en F.

Correction de l'exercice 5 - Équation d'un cercle

Formule du cours : le cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r a pour équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- Ici $a = 3$, $b = -2$ et $r = 4$.
- On remplace en faisant attention au signe : $y - (-2) = y + 2$.

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

- Contrôle : le point $(7; -2)$, situé à 4 unités à droite du centre, donne $(7 - 3)^2 + 0 = 16$. Il est bien sur le cercle.

Réponse. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$.

Correction de l'exercice 6 - Appartenance à un cercle

Un point appartient au cercle si ses coordonnées **vérifient** l'équation.

- Pour $A(4; 1)$: $(4 - 1)^2 + (1 + 3)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. L'égalité est vérifiée : $A \in C$.
- Pour $B(5; 0)$: $(5 - 1)^2 + (0 + 3)^2 = 16 + 9 = 25$. L'égalité est vérifiée aussi : $B \in C$.
- Lecture de l'équation : le centre est $\Omega(1; -3)$ et le rayon $r = \sqrt{25} = 5$. On peut le confirmer : $\Omega A = \sqrt{9 + 16} = 5$.

Réponse. Les deux points appartiennent à C (centre $\Omega(1; -3)$, rayon 5).

Correction de l'exercice 7 - Cercle de diamètre donné

Méthode : le centre du cercle est le **milieu** de $[AB]$, et le rayon vaut la moitié de AB .

— Centre : $\Omega\left(\frac{-1+5}{2}; \frac{2+4}{2}\right) = (2; 3)$.

— Longueur $AB = \sqrt{(5+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$.

— Rayon : $r = \frac{\sqrt{40}}{2}$, donc $r^2 = \frac{40}{4} = 10$.

— Équation du cercle :

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$$

— Vérification avec A : $(-1-2)^2 + (2-3)^2 = 9+1 = 10$. Correct.

Réponse. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$.

Correction de l'exercice 8 - Reconnaître centre et rayon

On compare à la forme du cours $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

a) $x+2 = x-(-2)$ donc $a = -2$; $b = 5$; $r^2 = 9$ donc $r = 3$. C'est le cercle de centre $(-2; 5)$ et de rayon 3.

b) $r^2 = 0$: la somme de deux carrés est nulle seulement si les deux sont nuls, donc $x = 1$ et $y = -1$. L'ensemble est réduit à un **point**, $(1; -1)$: ce n'est pas un cercle (rayon nul).

c) Une somme de carrés ne peut pas être négative : **aucun** point ne vérifie l'équation, l'ensemble est vide.

Réponse. a) centre $(-2; 5)$, rayon 3 · b) un seul point $(1; -1)$ · c) ensemble vide.

Correction de l'exercice 9 - Parallélogramme et distances

a) $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SR}\begin{pmatrix} 7-1 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

— $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$: le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.

b) $PQ = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$.

— $PS = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$.

— $\sqrt{40} \neq \sqrt{17}$: deux côtés consécutifs n'ont pas la même longueur, donc $PQRS$ **n'est pas** un losange. C'est un parallélogramme quelconque.

Réponse. a) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ · b) $PQ = \sqrt{40} \neq PS = \sqrt{17}$: pas un losange.

Correction de l'exercice 10 - Problème : antenne et zone de couverture

Un village est couvert lorsque sa distance à l'antenne est **inférieure ou égale** à 5. On compare les carrés, ce qui évite les racines : la condition devient $\Omega V^2 \leq 25$.

— $\Omega V_1^2 = (8-4)^2 + (6-3)^2 = 16+9 = 25$. Donc $\Omega V_1 = 5$: le village est **juste à la limite**, il est couvert.

— $\Omega V_2^2 = (0-4)^2 + (-2-3)^2 = 16+25 = 41 > 25$: non couvert ($\Omega V_2 = \sqrt{41} \approx 6,4$ km).

— $\Omega V_3^2 = (9-4)^2 + (7-3)^2 = 25+16 = 41 > 25$: non couvert également.

— Conclusion : seul V_1 est dans la zone de couverture, et il est exactement sur le cercle d'équation $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

Réponse. Seul V_1 est couvert (à la limite) ; V_2 et V_3 sont à $\sqrt{41} \approx 6,4$ km.

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : triangle et cercle circonscrit

a) $CA = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}.$

— $CB = \sqrt{(3 - 0)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{18}.$

— $CA = CB = 3\sqrt{2}$: le triangle est isocèle en C .

— De plus $AB = 6$ et $CA^2 + CB^2 = 18 + 18 = 36 = AB^2$: il est même rectangle en C .

b) Comme le triangle est rectangle en C , son hypoténuse $[AB]$ est un **diamètre** du cercle circonscrit (propriété du cercle circonscrit à un triangle rectangle).

— Centre : milieu de $[AB]$, soit $\left(\frac{-3+3}{2}; 0\right) = O(0; 0).$

— Rayon : $\frac{AB}{2} = 3.$

— Contrôle : $OC = \sqrt{0 + 3^2} = 3$: le point C est bien à la distance 3 du centre. Une équation du cercle est $x^2 + y^2 = 9.$

Réponse. a) $CA = CB = 3\sqrt{2}$ (et rectangle en C) · b) centre $O(0; 0)$, rayon 3, équation $x^2 + y^2 = 9.$