Plaquette 1 – Distances, milieux et cercles dans un repère

Géométrie repérée — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes de la géométrie repérée.

— Le repère est **orthonormé** : axes perpendiculaires, même unité. C'est la condition pour utiliser la formule de la distance.

— Distance : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

— Milieu de $[AB]$: $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

— **Cercle** de centre Ω et de rayon r : l'ensemble des points M tels que $\Omega M = r$. On compare les carrés, ce qui évite les racines :

$$M \in C \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$$

— Triangle rectangle : réciproque de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ donne l'angle droit en A.

— Triangle isocèle en A : $AB = AC$. Équilatéral : $AB = AC = BC$.

— Un point est **à l'intérieur** du cercle si $\Omega M < r$, **à l'extérieur** si $\Omega M > r$.

Correction de l'exercice 1 – Calculer une distance

On applique la formule du cours :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

— $x_B - x_A = 6 - 2 = 4$ et $y_B - y_A = 2 - (-1) = 3$.

— $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$.

— La longueur est exacte : $AB = 5$ unités.

Piège. On soustrait les coordonnées **avant** d'élever au carré, et on n'oublie pas la double négation $2 - (-1) = 3$.

Réponse. $AB = 5$.

Correction de l'exercice 2 – Milieu et symétrique

a) Formule du milieu : $M\left(\dfrac{-4 + 2}{2} ; \dfrac{3 + (-5)}{2}\right) = (-1 ; -1)$.

b) Dire que A' est le symétrique de A par rapport à B signifie que B est le **milieu** de $[AA']$.

— En notant $A'(x ; y)$: $\dfrac{-4 + x}{2} = 2$ et $\dfrac{3 + y}{2} = -5$.

— Première équation : $-4 + x = 4$, donc $x = 8$.

— Seconde équation : $3 + y = -10$, donc $y = -13$.

— Vérification : le milieu de $[AA']$ est $\left(\dfrac{-4 + 8}{2} ; \dfrac{3 - 13}{2}\right) = (2 ; -5) = B$. Correct.

Réponse. a) $M(-1 ; -1)$ · b) $A'(8 ; -13)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Nature d'un triangle (isocèle)

— $AB = \sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$.
— $AC = \sqrt{(3-1)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$.
— $BC = \sqrt{(3-5)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$.
— On a $AB = BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$: le triangle est **isocèle en** B.
— Est-il rectangle ? On teste la réciproque de Pythagore avec le plus grand côté AC : $AC^2 = 40$ et $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40$. L'égalité est vérifiée !
— Le triangle ABC est donc **rectangle isocèle en** B.

Méthode. On garde les longueurs sous forme de racines carrées (ou de carrés) : les comparaisons sont exactes, sans arrondi.

Réponse. $AB = BC = 2\sqrt{5}$, $AC = 2\sqrt{10}$: triangle rectangle isocèle en B.

Correction de l'exercice 4 – Réciproque de Pythagore dans un repère

On calcule les **carrés** des longueurs, ce qui évite toute racine.

— $EF^2 = (1-(-2))^2 + (4-0)^2 = 9 + 16 = 25$.
— $FG^2 = (5-1)^2 + (1-4)^2 = 16 + 9 = 25$.
— $EG^2 = (5-(-2))^2 + (1-0)^2 = 49 + 1 = 50$.
— Le plus grand carré est $EG^2 = 50$, et $EF^2 + FG^2 = 25 + 25 = 50$.
— D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est **rectangle en** F (le sommet opposé au plus grand côté).
— De plus $EF = FG = 5$: il est aussi isocèle, donc rectangle isocèle en F.

Réponse. $EG^2 = EF^2 + FG^2 = 50$: triangle rectangle (et isocèle) en F.

Correction de l'exercice 5 – Points remarquables d'un cercle

a) Les points du cercle sont à la distance 4 du centre. Sur l'horizontale passant par Ω, on se déplace de 4 vers la droite ou vers la gauche : $(7\,;-2)$ et $(-1\,;-2)$. Sur la verticale, de 4 vers le haut ou vers le bas : $(3\,;2)$ et $(3\,;-6)$.

b) On compare ΩA au rayon, en passant par les carrés :

$$\Omega A^2 = (5-3)^2 + (1+2)^2 = 4 + 9 = 13$$

Comme $13 < 16 = 4^2$, on a $\Omega A = \sqrt{13} \approx 3{,}6 < 4$: le point A n'est pas sur le cercle, il est à l'intérieur.

Réponse. a) $(7\,;-2)$, $(-1\,;-2)$, $(3\,;2)$ et $(3\,;-6)$ · b) non, A est à l'intérieur ($\Omega A = \sqrt{13}$).

Correction de l'exercice 6 – Appartenance à un cercle

Un point appartient au cercle si et seulement si sa distance au centre est égale au rayon. On compare les carrés des distances à $5^2 = 25$:

$$\Omega A^2 = (4-1)^2 + (1+3)^2 = 9 + 16 = 25 \qquad \Omega B^2 = (5-1)^2 + (0+3)^2 = 16 + 9 = 25$$

Les deux points sont à la distance 5 du centre : A et B appartiennent à C.

On reconnaît le triplet 3-4-5 : depuis le centre, A est à 3 vers la droite et 4 vers le haut, B à 4 vers la droite et 3 vers le haut.

Réponse. Oui pour les deux : $\Omega A = \Omega B = 5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 7 – Cercle de diamètre donné

Le centre du cercle de diamètre $[AB]$ est le **milieu** de $[AB]$, et le rayon vaut la moitié de AB.

— Centre : $\Omega\left(\dfrac{-1+5}{2}\,;\dfrac{2+4}{2}\right) = (2\,;3)$.

— $AB = \sqrt{6^2+2^2} = \sqrt{40}$, donc le rayon vaut $r = \dfrac{\sqrt{40}}{2}$ et $r^2 = \dfrac{40}{4} = 10$.

Pour C, on compare ΩC^2 à $r^2 = 10$:

$$\Omega C^2 = (3-2)^2 + (6-3)^2 = 1 + 9 = 10$$

C est sur le cercle. Le triangle ABC est donc rectangle en C. **Contrôle** : $CA^2 + CB^2 = 32 + 8 = 40 = AB^2$.

Réponse. Centre $\Omega(2\,;3)$, rayon $\sqrt{10}$; C est sur le cercle.

Correction de l’exercice 8 – Rayon d’un cercle passant par un point

Le rayon est la distance du centre à un point du cercle :

$$r = \Omega A = \sqrt{(1+2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

On compare ensuite les distances au centre avec 5 :

— $\Omega B = |0-5| = 5$, puisque B est à la verticale de Ω : B est sur le cercle.

— $\Omega D^2 = (2+2)^2 + (3-5)^2 = 16 + 4 = 20 < 25$: D est à l’intérieur ($\Omega D = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$).

Réponse. $r = 5$; B est sur le cercle, D à l’intérieur.

Correction de l’exercice 9 – Parallélogramme et distances

a) $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SR}\begin{pmatrix}7-1\\6-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$.

— $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$: le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.

b) $PQ = \sqrt{6^2+2^2} = \sqrt{40}$.

— $PS = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$.

— $\sqrt{40} \neq \sqrt{17}$: deux côtés consécutifs n’ont pas la même longueur, donc $PQRS$ **n’est pas** un losange. C’est un parallélogramme quelconque.

Réponse. a) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ · b) $PQ = \sqrt{40} \neq PS = \sqrt{17}$: pas un losange.

Correction de l’exercice 10 – Problème : antenne et zone de couverture

Un village est couvert lorsque sa distance à l’antenne est **inférieure ou égale** à 5. On compare les carrés, ce qui évite les racines : la condition devient $\Omega V^2 \leq 25$.

— $\Omega V_1^2 = (8-4)^2 + (6-3)^2 = 16 + 9 = 25$. Donc $\Omega V_1 = 5$: le village est **juste à la limite**, il est couvert.

— $\Omega V_2^2 = (0-4)^2 + (-2-3)^2 = 16 + 25 = 41 > 25$: non couvert ($\Omega V_2 = \sqrt{41} \approx 6{,}4$ km).

— $\Omega V_3^2 = (9-4)^2 + (7-3)^2 = 25 + 16 = 41 > 25$: non couvert également.

— Conclusion : seul V_1 est dans la zone de couverture, et il est exactement sur le cercle de centre Ω et de rayon 5.

Réponse. Seul V_1 est couvert (à la limite) ; V_2 et V_3 sont à $\sqrt{41} \approx 6{,}4$ km.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 11 – Quatrième sommet par les milieux

Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le **même milieu**. On calcule le milieu de $[AC]$:

$$I\left(\frac{1+6}{2}\,;\frac{1+5}{2}\right) = (3{,}5\,;3)$$

I doit aussi être le milieu de $[BD]$. Avec $D(x\,;y)$: $\dfrac{5+x}{2} = 3{,}5$ et $\dfrac{2+y}{2} = 3$, donc $x = 2$ et $y = 4$.

Le point cherché est $D(2\,;4)$. **Contrôle** : $AB = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$ et $DC = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$, les côtés opposés ont bien la même longueur.

Réponse. $D(2\,;4)$.

Correction de l’exercice 12 – Points sur un cercle centré à l’origine

Un point M est sur le cercle si et seulement si $OM = 5$, c’est-à-dire $OM^2 = 25$. Pour un point $M(x\,;y)$, $OM^2 = x^2 + y^2$.

$$OE^2 = 9 + 16 = 25 \qquad OF^2 = 25 + 0 = 25 \qquad OG^2 = 16 + 16 = 32$$

E et F sont sur le cercle. G ne l’est pas : $OG = \sqrt{32} \approx 5{,}66 > 5$, il est à l’extérieur, même si la figure semble le placer près du cercle. Le calcul tranche là où l’œil hésite.

Réponse. E et F sont sur C ; G est à l’extérieur ($OG = 4\sqrt{2}$).

Correction de l’exercice 13 – Triangle rectangle et aire

On calcule les carrés des longueurs : $AB^2 = 16 + 4 = 20$, $AC^2 = 1 + 4 = 5$ et $BC^2 = 25 + 0 = 25$. Le plus grand est BC^2, et

$$AB^2 + AC^2 = 20 + 5 = 25 = BC^2$$

D’après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est **rectangle en** A.

L’aire est la moitié du produit des côtés de l’angle droit : $\dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{\sqrt{20} \times \sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{100}}{2} = 5$. **Contrôle** : $[BC]$ est horizontal, de longueur 5, et la hauteur issue de A vaut 2 ; $\dfrac{5 \times 2}{2} = 5$.

Réponse. Rectangle en A ($20 + 5 = 25$) ; aire 5.

Correction de l’exercice 14 – Point de l’axe équidistant

Le point cherché s’écrit $M(x\,;0)$. On traduit $MA = MB$ par $MA^2 = MB^2$, ce qui supprime les racines :

$$(x-1)^2 + 3^2 = (x-5)^2 + 1^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 10 = x^2 - 10x + 26$$

Les termes x^2 s’éliminent : $8x = 16$, donc $x = 2$. Le point cherché est $M(2\,;0)$.

Vérification : $MA^2 = 1 + 9 = 10$ et $MB^2 = 9 + 1 = 10$. M est le point où la médiatrice de $[AB]$ coupe l’axe des abscisses.

Réponse. $M(2\,;0)$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : triangle et cercle circonscrit

a) $CA = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $CB = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{18}$.
— $CA = CB = 3\sqrt{2}$: le triangle est isocèle en C.
— De plus $AB = 6$ et $CA^2 + CB^2 = 18 + 18 = 36 = AB^2$: il est même rectangle en C.

b) Comme le triangle est rectangle en C, son hypoténuse $[AB]$ est un **diamètre** du cercle circonscrit (propriété du cercle circonscrit à un triangle rectangle).

— Centre : milieu de $[AB]$, soit $\left(\dfrac{-3+3}{2} ; 0\right) = O(0\,;0)$.
— Rayon : $\dfrac{AB}{2} = 3$.
— Contrôle : $OC = \sqrt{0 + 3^2} = 3$: le point C est bien à la distance 3 du centre.

Réponse. a) $CA = CB = 3\sqrt{2}$ (et rectangle en C) · b) centre $O(0\,;0)$, rayon 3.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).