

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : lieux, optimisation et modélisation

Géométrie repérée — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Traduire une condition en équation. On pose $M(x; y)$, on écrit la condition, on développe, on simplifie.

Condition sur M	Ensemble obtenu
$MA = MB$	la médiatrice de $[AB]$
$MA = r$	le cercle de centre A et rayon r
$MA \leq r$	le disque fermé
$MA^2 + MB^2 = k$	un cercle (ou un point, ou rien)
$MA = kMB$ avec $k \neq 1$	un cercle (dit d'Apollonius)
M équidistant de deux axes	deux droites, $y = x$ et $y = -x$

Le réflexe des carrés. On écrit toujours MA^2 , jamais MA : les racines disparaissent et l'équation devient exploitable. Les termes x^2 et y^2 s'éliminent quand les deux membres en contiennent autant — c'est le cas d'une médiatrice.

Optimiser une distance. Deux techniques en Seconde :

- la **réflexion** : pour minimiser $MA + MB$ avec M sur une droite, on remplace A par son symétrique A' par rapport à cette droite ; le minimum vaut $A'B$;
- la **projection** : la distance d'un point à une droite est atteinte au **projeté orthogonal**.

Optimiser une aire. On exprime l'aire en fonction d'une variable, puis on cherche le maximum — souvent par la **forme canonique** d'un trinôme :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Le sommet est atteint en $x = -\frac{b}{2a}$.

Vérifier une réponse d'optimisation. On teste deux ou trois valeurs proches de l'optimum : elles doivent donner un résultat **moins bon**.

Correction de l'exercice 1 - Un lieu de points : la médiatrice

- **Condition** : $MA = MB$, qu'on écrit $MA^2 = MB^2$ ✓
- **Calcul de MA^2** : $(x - 1)^2 + (y - 4)^2$ ✓
- **Développement** : $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2 - 2x - 8y + 17$ ✓
- **Calcul de MB^2** : $(x - 7)^2 + (y + 2)^2$ ✓
- **Développement** : $x^2 - 14x + 49 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + y^2 - 14x + 4y + 53$ ✓
- **Équation** : les x^2 et y^2 s'éliminent ✓
- **Il reste** : $-2x - 8y + 17 = -14x + 4y + 53$ ✓
- **Réorganisation** : $12x - 12y - 36 = 0$ ✓

— **Simplification** : $x - y - 3 = 0$, soit

$$y = x - 3$$

— **Nature de l'ensemble** : une **droite**, la médiatrice de $[AB]$ ✓

— **Contrôle par le milieu** : $I = (4; 1)$, et $4 - 1 - 3 = 0$ ✓

— **Contrôle de la perpendicularité** : $\overrightarrow{AB} = (6; -6)$, de pente -1 ✓

— **Pente de la médiatrice** : 1 ✓

— **Produit** : $-1 \times 1 = -1$ ✓

— **Test sur un point** : $M(0; -3)$ donne $MA^2 = 1 + 49 = 50$ et $MB^2 = 49 + 1 = 50$ ✓

— **Autre test** : $M(6; 3)$ donne $MA^2 = 25 + 1 = 26$ et $MB^2 = 1 + 25 = 26$ ✓

Réponse. La droite $y = x - 3$, médiatrice de $[AB]$.

Correction de l'exercice 2 - Un lieu de points : le cercle

— **Écriture de MA^2** : $(x + 3)^2 + y^2$ ✓

— **Écriture de MB^2** : $(x - 3)^2 + y^2$ ✓

— **Somme** : $x^2 + 6x + 9 + y^2 + x^2 - 6x + 9 + y^2$ ✓

— **Simplification** : les termes en x s'annulent ✓

— **Il reste** : $2x^2 + 2y^2 + 18$ ✓

— **Équation** : $2x^2 + 2y^2 + 18 = 50$ ✓

— **Division par 2** : $x^2 + y^2 + 9 = 25$ ✓

— **Donc** :

$$x^2 + y^2 = 16$$

— **Nature** : le **cercle** de centre $O(0; 0)$ et de rayon 4 ✓

— **Remarque** : O est le milieu de $[AB]$ ✓

— **Test sur $(4; 0)$** : $MA^2 = 49$ et $MB^2 = 1$, de somme 50 ✓

— **Test sur $(0; 4)$** : $MA^2 = 9 + 16 = 25$ et $MB^2 = 25$, de somme 50 ✓

— **Test sur $(0; 0)$** : $9 + 9 = 18 \neq 50$, l'origine n'appartient pas au lieu ✓

— **Valeur minimale de $MA^2 + MB^2$** : atteinte au milieu O , soit 18 ✓

— **Conséquence** : l'ensemble est **vide** si le second membre est inférieur à 18 ✓

— **Cas limite** : avec 18 , l'ensemble est réduit au point O ✓

Réponse. Le cercle $x^2 + y^2 = 16$, de centre O et rayon 4 .

Correction de l'exercice 3 - Points équidistants des deux axes

— **Distance à l'axe des ordonnées** : $|x|$ ✓

— **Distance à l'axe des abscisses** : $|y|$ ✓

— **Condition** : $|x| = |y|$ ✓

— **Traduction** : $y = x$ ou $y = -x$ ✓

— **Nature de l'ensemble** : la réunion des **deux bissectrices** des axes ✓

— **Seconde condition** : $OM = 5$, soit $x^2 + y^2 = 25$ ✓

— **Sur la droite $y = x$** : $2x^2 = 25$, donc $x^2 = 12,5$ ✓

— **Solutions** : $x = \pm \frac{5}{\sqrt{2}} = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx \pm 3,536$ ✓

— **Points** : $(3,536; 3,536)$ et $(-3,536; -3,536)$ ✓

— **Sur la droite $y = -x$** : deux autres points, $(3,536; -3,536)$ et $(-3,536; 3,536)$ ✓

— **Nombre total** : **quatre** points ✓

- **Contrôle** : $12,5 + 12,5 = 25$ ✓
- **Interprétation** : ce sont les quatre points du cercle de rayon 5 situés « en diagonale » ✓
- **Quadrilatère formé** : un **carré** inscrit dans le cercle ✓
- **Côté de ce carré** : $2 \times 3,536 = 7,071 = 5\sqrt{2}$ ✓
- **Aire du carré** : 50 ✓
- **Contrôle** : c'est bien $\frac{2r^2}{1} = 2 \times 25 = 50$, formule du carré inscrit ✓

Réponse. Les droites $y = x$ et $y = -x$; avec la seconde condition, quatre points d'abscisses $\pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Correction de l'exercice 4 - Minimiser une somme de distances

- **Méthode** : la réflexion ✓
- **Symétrique de A par rapport à la route** : $A'(0; -4)$ ✓
- **Propriété** : $MA = MA'$ pour tout M de la route ✓
- **Donc** : minimiser $MA + MB$ revient à minimiser $MA' + MB$ ✓
- **Minimum d'une somme de deux distances** : atteint quand M est **sur** le segment $[A'B]$ ✓
- **Droite (A'B)** : pente $\frac{6 - (-4)}{10 - 0} = 1$ ✓
- **Équation** : $y = x - 4$ ✓
- **Intersection avec l'axe des abscisses** : $x = 4$ ✓
- **Station** :

$$M(4; 0)$$

- **Valeur du minimum** : $A'B = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2} \approx 14,142$ ✓
- **Vérification** : $MA = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2} \approx 5,657$ ✓
- **Puis** : $MB = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2} \approx 8,485$ ✓
- **Somme** : $4\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ ✓
- **Contrôle avec un autre point** : $M'(5; 0)$ donne $\sqrt{41} + \sqrt{61} \approx 6,403 + 7,810 = 14,213$ ✓
- **Comparaison** : $14,213 > 14,142$ ✓
- **Contrôle avec $M''(3; 0)$** : $\sqrt{25} + \sqrt{85} \approx 5 + 9,220 = 14,220 > 14,142$ ✓
- **Cohérence** : le minimum est bien en $x = 4$ ✓

Réponse. $M(4; 0)$, avec $MA + MB = 10\sqrt{2} \approx 14,14$.

Correction de l'exercice 5 - Aire maximale d'un rectangle inscrit

- **Reformulation** : le rectangle a pour largeur t et pour hauteur h ✓
- **Contrainte de périmètre** : $2(t + h) = 20$, donc $t + h = 10$ ✓
- **Hauteur** : $h = 10 - t$ ✓
- **Aire** :

$$A(t) = t(10 - t) = -t^2 + 10t$$

- **Domaine** : $0 \leq t \leq 10$ ✓
- **Forme d'un trinôme** : $a = -1 < 0$, la parabole est tournée vers le bas ✓
- **Abscisse du sommet** : $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{-2} = 5$ ✓
- **Aire maximale** :

$$A(5) = 5 \times 5 = 25$$

- **Forme canonique** : $-(t - 5)^2 + 25$ ✓
- **Contrôle** : $-(t^2 - 10t + 25) + 25 = -t^2 + 10t$ ✓
- **Nature du rectangle optimal** : un **carré** de côté 5 ✓
- **Contrôles de valeurs voisines** : $A(4) = 24$ et $A(6) = 24$ ✓
- **Comparaison** : $24 < 25$ ✓
- **Contrôles aux bornes** : $A(0) = 0$ et $A(10) = 0$ ✓
- **Symétrie** : la fonction est symétrique par rapport à $t = 5$ ✓
- **Règle générale** : à périmètre fixé, le rectangle d'aire maximale est le **carré** ✓
- **Sommets du rectangle optimal** : $(0; 0)$, $(5; 0)$, $(5; 5)$ et $(0; 5)$ ✓
- **Contrôle du périmètre** : $2(5 + 5) = 20$ ✓

Réponse. $t = 5$, pour une aire maximale de 25 (le rectangle est alors un carré).

Correction de l'exercice 6 - Distance minimale à une droite

- **Point générique de la droite** : $M(t; 2t)$ ✓
- **Carré de la distance** : $AM^2 = (t - 5)^2 + (2t)^2$ ✓
- **Développement** : $t^2 - 10t + 25 + 4t^2 = 5t^2 - 10t + 25$ ✓
- **Trinôme en t** : $a = 5 > 0$, il y a un **minimum** ✓
- **Abscisse du sommet** : $t = -\frac{-10}{2 \times 5} = 1$ ✓
- **Point le plus proche** :

$$M(1; 2)$$

- **Carré de la distance minimale** : $5 - 10 + 25 = 20$ ✓
- **Distance minimale** :

$$AM = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,472$$

- **Contrôles de valeurs voisines** : $t = 0$ donne 25 ✓
- **Et** : $t = 2$ donne $20 - 20 + 25 = 25$ ✓
- **Comparaison** : $25 > 20$ dans les deux cas ✓
- **Contrôle de l'orthogonalité** : $\overrightarrow{AM} = (-4; 2)$ ✓
- **Vecteur directeur de la droite** : $(1; 2)$ ✓
- **Produit** : $-4 \times 1 + 2 \times 2 = 0$ ✓
- **Conclusion** : M est bien le **projeté orthogonal** de A ✓
- **Forme canonique** : $5(t - 1)^2 + 20$, ce qui confirme le minimum 20 en $t = 1$ ✓

Réponse. $M(1; 2)$, à distance $2\sqrt{5} \approx 4,472$.

Correction de l'exercice 7 - Zone de couverture

- **Couverture de A sur l'axe** : de -6 à 6 ✓
- **Couverture de B sur l'axe** : de $9 - 5 = 4$ à $9 + 5 = 14$ ✓
- **Au moins une antenne** : la réunion des deux intervalles ✓
- **Réunion** : $[-6; 6] \cup [4; 14] = [-6; 14]$, car les intervalles se **chevauchent** ✓
- **Longueur couverte** :

$$14 - (-6) = 20 \text{ km}$$

- **Les deux antennes** : l'intersection ✓
- **Intersection** : $[4; 6]$ ✓

- **Longueur** : 2 km ✓
- **Contrôle** : $12 + 10 - 2 = 20$ ✓
- **Cohérence** : la formule de la réunion est respectée ✓
- **Distance entre antennes** : 9 km ✓
- **Somme des portées** : 11 km ✓
- **Comparaison** : $9 < 11$, les disques se coupent ✓
- **Point** $P(4,5; 3)$: $AP = \sqrt{20,25 + 9} = \sqrt{29,25} \approx 5,408 < 6$ ✓
- **Et** : $BP = \sqrt{20,25 + 9} = \sqrt{29,25} \approx 5,408 > 5$ ✓
- **Conclusion pour P** : couvert par A seulement ✓

Réponse. Au moins une antenne : $[-6; 14]$, soit 20 km · les deux : $[4; 6]$, soit 2 km.

Correction de l'exercice 8 - Découpe optimale

- **Équation de (BC)** : elle passe par $(12; 0)$ et $(0; 8)$ ✓
- **Pente** : $\frac{8-0}{0-12} = -\frac{2}{3}$ ✓
- **Équation** : $y = -\frac{2}{3}x + 8$ ✓
- **Contrôle en B** : $-8 + 8 = 0$ ✓
- **Sommet mobile** : $M\left(x; -\frac{2}{3}x + 8\right)$ avec $0 \leq x \leq 12$ ✓
- **Dimensions du rectangle** : largeur x , hauteur $-\frac{2}{3}x + 8$ ✓
- **Aire** :

$$A(x) = x\left(-\frac{2}{3}x + 8\right) = -\frac{2}{3}x^2 + 8x$$

- **Trinôme** : $a = -\frac{2}{3} < 0$, il y a un **maximum** ✓
- **Abscisse du sommet** : $x = -\frac{8}{2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{8}{\frac{4}{3}} = 6$ ✓
- **Hauteur correspondante** : $-4 + 8 = 4$ ✓
- **Aire maximale** :

$$A(6) = 6 \times 4 = 24$$

- **Contrôles voisins** : $A(5) = 5 \times \frac{14}{3} \approx 23,33$ ✓
- **Et** : $A(7) = 7 \times \frac{10}{3} \approx 23,33$ ✓
- **Comparaison** : les deux sont inférieurs à 24 ✓
- **Aire du triangle** : $\frac{12 \times 8}{2} = 48$ ✓
- **Rapport** : $\frac{24}{48} = \frac{1}{2}$ ✓
- **Règle générale remarquable** : le rectangle inscrit maximal occupe toujours la **moitié** du triangle rectangle, et ses sommets sont les milieux des côtés ✓
- **Contrôle** : $6 = \frac{12}{2}$ et $4 = \frac{8}{2}$ ✓

Réponse. 6 par 4, pour une aire maximale de 24 — la moitié du triangle.

Correction de l'exercice 9 - Lieu d'un point à distance double

- **Passage aux carrés** : $MA^2 = 9MB^2$ ✓
- **Écriture** : $x^2 + y^2 = 9[(x-4)^2 + y^2]$ ✓

- **Développement du membre de droite** : $9(x^2 - 8x + 16 + y^2) = 9x^2 - 72x + 144 + 9y^2$ ✓
- **Équation** : $x^2 + y^2 = 9x^2 - 72x + 144 + 9y^2$ ✓
- **Réorganisation** : $0 = 8x^2 + 8y^2 - 72x + 144$ ✓
- **Division par 8** : $x^2 + y^2 - 9x + 18 = 0$ ✓
- **Complétion du carré** : $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} + y^2 + 18 = 0$ ✓
- **Constante** : $-\frac{81}{4} + 18 = -\frac{81 - 72}{4} = -\frac{9}{4}$ ✓
- **Forme canonique** :

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

- **Nature** : un **cercle** de centre $\left(\frac{9}{2}; 0\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$ ✓
- **Test sur** $(3; 0)$: $MA = 3$ et $MB = 1$, donc $MA = 3MB$ ✓
- **Contrôle dans l'équation** : $(3 - 4,5)^2 + 0 = 2,25 = \frac{9}{4}$ ✓
- **Test sur** $(6; 0)$: $MA = 6$ et $MB = 2$ ✓
- **Contrôle** : $(6 - 4,5)^2 = 2,25$ ✓
- **Position du cercle** : entièrement du côté de B , ce qui est logique puisque M est trois fois plus loin de A ✓
- **Extrémités du diamètre horizontal** : $x = 3$ et $x = 6$ ✓

Réponse. Le cercle $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$, de centre $(4,5; 0)$ et rayon 1,5.

Correction de l'exercice 10 - Trajet optimal entre deux points

- **Méthode** : la réflexion, appliquée à B cette fois ✓
- **Symétrique de B par rapport à $y = 6$** : $B'(8; 10)$ ✓
- **Contrôle** : le milieu de $[BB']$ est $(8; 6)$, bien sur la droite ✓
- **Propriété** : pour tout M de la droite, $MB = MB'$ ✓
- **Minimisation** : $AM + MB = AM + MB'$, minimal quand $M \in [AB']$ ✓
- **Droite (AB')** : pente $\frac{10}{8} = 1,25$ ✓
- **Équation** : $y = 1,25x$ ✓
- **Intersection avec $y = 6$** : $1,25x = 6$, donc $x = 4,8$ ✓
- **Point de contact** :

$$M(4,8; 6)$$

- **Longueur minimale** : $AB' = \sqrt{64 + 100} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41} \approx 12,806$ ✓
- **Vérification** : $AM = \sqrt{23,04 + 36} = \sqrt{59,04} \approx 7,684$ ✓
- **Puis** : $MB = \sqrt{(8 - 4,8)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{10,24 + 16} = \sqrt{26,24} \approx 5,123$ ✓
- **Somme** : $7,684 + 5,123 \approx 12,807$ ✓
- **Contrôle avec $M'(4; 6)$** : $\sqrt{16 + 36} + \sqrt{16 + 16} \approx 7,211 + 5,657 = 12,868$ ✓
- **Comparaison** : $12,868 > 12,806$ ✓
- **Contrôle avec $M''(6; 6)$** : $\sqrt{36 + 36} + \sqrt{4 + 16} \approx 8,485 + 4,472 = 12,957 > 12,806$ ✓
- **Principe physique** : c'est la **loi de la réflexion** — l'angle d'incidence égale l'angle de réflexion ✓

Réponse. $M(4,8; 6)$, pour un trajet de $2\sqrt{41} \approx 12,81$.

Correction de l'exercice 11 - Aire en fonction d'un paramètre

- **Le triangle est rectangle en A** : les deux côtés sont sur les axes ✓
- **Cathètes** : $AB = t$ et $AC = 10 - t$ ✓
- **Aire** :

$$A(t) = \frac{t(10-t)}{2} = \frac{-t^2 + 10t}{2}$$

- **Trinôme** : $a = -\frac{1}{2} < 0$, il y a un maximum ✓
- **Abscisse du sommet** : $t = 5$ ✓
- **Aire maximale** :

$$A(5) = \frac{5 \times 5}{2} = 12,5$$

- **Forme canonique** : $\frac{-(t-5)^2 + 25}{2}$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{-(t^2 - 10t + 25) + 25}{2} = \frac{-t^2 + 10t}{2}$ ✓
- **Nature du triangle optimal** : rectangle **isocèle**, de cathètes 5 ✓
- **Contrôles voisins** : $A(4) = \frac{24}{2} = 12$ ✓
- **Et** : $A(6) = \frac{24}{2} = 12$ ✓
- **Comparaison** : $12 < 12,5$ ✓
- **Comportement aux bornes** : l'aire tend vers 0 quand $t \rightarrow 0$ ou $t \rightarrow 10$ ✓
- **Hypoténuse à l'optimum** : $BC = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2} \approx 7,071$ ✓
- **Périmètre à l'optimum** : $10 + 5\sqrt{2} \approx 17,071$ ✓
- **Règle générale** : la somme des cathètes étant fixée, l'aire est maximale quand elles sont **égales** ✓

Réponse. $A(t) = \frac{t(10-t)}{2}$, maximale en $t = 5$ avec $A = 12,5$.

Correction de l'exercice 12 - Un point sur un cercle

- **Condition** : $x = 2y$ ✓
- **Substitution** : $(2y)^2 + y^2 = 25$ ✓
- **Développement** : $4y^2 + y^2 = 5y^2 = 25$ ✓
- **Résolution** : $y^2 = 5$, donc $y = \pm\sqrt{5}$ ✓
- **Abscisses correspondantes** : $x = \pm 2\sqrt{5}$ ✓
- **Points** :

$$(2\sqrt{5}; \sqrt{5}) \quad \text{et} \quad (-2\sqrt{5}; -\sqrt{5})$$

- **Valeurs approchées** : $(4,472; 2,236)$ et $(-4,472; -2,236)$ ✓
- **Contrôle du premier** : $20 + 5 = 25$ ✓
- **Contrôle du second** : $20 + 5 = 25$ ✓
- **Contrôle de la condition** : $4,472 = 2 \times 2,236$ ✓
- **Symétrie** : les deux points sont **diamétralement opposés** ✓
- **Contrôle** : leur milieu est l'origine ✓
- **Interprétation géométrique** : ce sont les intersections du cercle avec la droite $y = \frac{x}{2}$ ✓

- **Distance entre eux** : $\sqrt{80 + 20} = \sqrt{100} = 10$, soit le diamètre ✓
- **Variante** : si l'on cherchait l'ordonnée double de l'abscisse, on trouverait $(\sqrt{5}; 2\sqrt{5})$ et son opposé ✓
- **Contrôle** : $5 + 20 = 25$ ✓

Réponse. $(2\sqrt{5}; \sqrt{5})$ et $(-2\sqrt{5}; -\sqrt{5})$, soit environ $(\pm 4,47; \pm 2,24)$.

Correction de l'exercice 13 - Un lieu vide

- **Écriture** : $(x + 4)^2 + y^2 + (x - 4)^2 + y^2 = 10$ ✓
- **Développement** : $x^2 + 8x + 16 + y^2 + x^2 - 8x + 16 + y^2 = 10$ ✓
- **Simplification** : les termes en x s'annulent ✓
- **Il reste** : $2x^2 + 2y^2 + 32 = 10$ ✓
- **Réorganisation** : $2x^2 + 2y^2 = -22$ ✓
- **Division par 2** :

$$x^2 + y^2 = -11$$
- **Analyse** : une somme de carrés ne peut être négative ✓
- **Conclusion** : l'ensemble est **vide** ✓
- **Valeur minimale possible de $MA^2 + MB^2$** : atteinte au milieu de $[AB]$, soit l'origine ✓
- **Calcul** : $16 + 16 = 32$ ✓
- **Comparaison** : $10 < 32$, la condition est donc impossible ✓
- **Seuil critique** : l'ensemble est vide si le second membre est inférieur à 32 ✓
- **Cas limite** : avec 32, l'ensemble est réduit au point $O(0; 0)$ ✓
- **Cas favorable** : avec 50, on obtiendrait $x^2 + y^2 = 9$, un cercle de rayon 3 ✓
- **Contrôle** : $2x^2 + 2y^2 + 32 = 50$ donne $x^2 + y^2 = 9$ ✓
- **Leçon de méthode** : il faut toujours **vérifier la cohérence** du résultat avant de conclure ✓

Réponse. L'ensemble est **vide** : la valeur minimale de $MA^2 + MB^2$ est $32 > 10$.

Correction de l'exercice 14 - Le plus court chemin par un pont

- **Modélisation** : le pont va de $(p; 1)$ à $(p; 0)$ ✓
- **Trajet total** : $A \rightarrow (p; 1)$, puis le pont (longueur 1, fixe), puis $(p; 0) \rightarrow B$ ✓
- **Partie fixe** : la longueur du pont, 1, ne dépend pas de p ✓
- **À minimiser** : la somme des deux trajets terrestres ✓
- **Astuce** : on translate B de +1 vers le haut pour « supprimer » la rivière ✓
- **Point translaté** : $B'(12; -2)$ ✓
- **Nouveau problème** : minimiser $A(p; 1) + (p; 1)B'$, soit un trajet passant par la droite $y = 1$ ✓
- **Simplification** : le minimum est atteint quand $(p; 1)$ est sur le segment $[AB']$ ✓
- **Droite (AB')** : pente $\frac{-2 - 5}{12 - 0} = -\frac{7}{12}$ ✓
- **Équation** : $y = -\frac{7}{12}x + 5$ ✓
- **Intersection avec $y = 1$** : $-\frac{7}{12}x = -4$, donc $x = \frac{48}{7} \approx 6,857$ ✓
- **Position du pont** :

$$p = \frac{48}{7} \approx 6,86$$

- **Longueur des trajets terrestres** : $AB' = \sqrt{144 + 49} = \sqrt{193} \approx 13,892 \checkmark$
- **Trajet total minimal** : $\sqrt{193} + 1 \approx 14,892 \checkmark$
- **Contrôle avec $p = 6$** : $\sqrt{36 + 16} + \sqrt{36 + 9} \approx 7,211 + 6,708 = 13,919$, plus 1, soit 14,919 $\checkmark$
- **Comparaison** : $14,919 > 14,892 \checkmark$
- **Contrôle avec $p = 8$** : $\sqrt{64 + 16} + \sqrt{16 + 9} \approx 8,944 + 5 = 13,944$, plus 1, soit 14,944 $> 14,892 \checkmark$

Réponse. Le pont en $x = \frac{48}{7} \approx 6,86$, pour un trajet total de $\sqrt{193} + 1 \approx 14,89$.

Correction de l'exercice 15 - Cercle et tangente commune

- **Tangentes horizontales au premier cercle** : $y = 3$ et $y = -3 \checkmark$
- **Tangentes horizontales au second** : $y = 2$ et $y = -2 \checkmark$
- **Comparaison** : aucune droite horizontale n'est commune $\checkmark$
- **Conclusion partielle** : c'est **impossible**, les rayons étant différents $\checkmark$
- **Raison** : une horizontale tangente est à distance r du centre, et $3 \neq 2 \checkmark$
- **Condition pour que ce soit possible** : $r_A = r_B \checkmark$
- **Contrôle du cas égal** : avec deux rayons de 3, les droites $y = 3$ et $y = -3$ seraient tangentes aux deux $\checkmark$
- **Les tangentes communes réelles ici** : elles sont **obliques** $\checkmark$
- **Nombre de tangentes communes** : la distance des centres vaut $10 > 3 + 2 = 5 \checkmark$
- **Conclusion** : les cercles sont disjoints extérieurement, il y a **quatre** tangentes communes $\checkmark$
- **Deux extérieures** : elles ne séparent pas les cercles $\checkmark$
- **Deux intérieures** : elles passent entre les deux $\checkmark$
- **Point de concours des tangentes extérieures** : sur (AB) , tel que $\frac{d_A}{d_B} = \frac{3}{2} \checkmark$
- **Calcul** : $d_A - d_B = 10$ avec $d_A = \frac{3}{2}d_B$, donc $\frac{1}{2}d_B = 10$ et $d_B = 20 \checkmark$
- **Point** : à 30 de A du côté de B, soit $(30; 0) \checkmark$
- **Point de concours des tangentes intérieures** : il partage $[AB]$ dans le rapport $\frac{3}{2}$, soit $(6; 0) \checkmark$
- **Contrôle** : $\frac{6}{3} = 2$ et $\frac{10-6}{2} = 2 \checkmark$

Réponse. Impossible : une horizontale tangente est à distance r du centre, et $3 \neq 2$. Les quatre tangentes communes sont obliques.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : aménagement d'un terrain

a) **Le triangle est rectangle en A** : les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont sur les axes $\checkmark$

— **Aire** :

$$A = \frac{60 \times 45}{2} = 1350 \text{ m}^2$$

- **Longueur BC** : $\sqrt{3600 + 2025} = \sqrt{5625} = 75 \text{ m} \checkmark$
- **Remarque** : 60-45-75 est un triplet pythagoricien (trois fois 20-15-25, soit quinze fois 4-3-5) $\checkmark$
- **Périmètre** : $60 + 45 + 75 = 180 \text{ m} \checkmark$
- **Contrôle de l'aire par le déterminant** : $\overrightarrow{AB} = (60; 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (0; 45)$, de déterminant 2700 $\checkmark$

b) **Le puits est le centre du cercle circonscrit** ✓— **Propriété du triangle rectangle** : ce centre est le **milieu de l'hypoténuse** ✓— **Position** :

$$P\left(\frac{60+0}{2}; \frac{0+45}{2}\right) = (30; 22,5)$$

— **Distance commune** : $\frac{75}{2} = 37,5$ m ✓— **Contrôle depuis A** : $\sqrt{900 + 506,25} = \sqrt{1406,25} = 37,5$ ✓— **Contrôle depuis B** : $\sqrt{900 + 506,25} = 37,5$ ✓— **Contrôle depuis C** : $\sqrt{900 + 506,25} = 37,5$ ✓c) **Propriété** : une droite issue de A partage l'aire comme elle partage [BC] ✓— **Donc** : la clôture atteint le **milieu** de [BC] ✓— **Position** :

$$M(30; 22,5)$$

— **Observation** : c'est exactement l'emplacement du puits ✓— **Explication** : dans un triangle rectangle, la médiane issue de l'angle droit aboutit au centre du cercle circonscrit ✓— **Aire de chaque partie** : 675 m^2 ✓— **Contrôle** : $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}) = 60 \times 22,5 - 30 \times 0 = 1350$, soit une aire de 675 ✓— **Longueur de la clôture** : $AM = 37,5$ m ✓— **Remarque utile** : dans un triangle rectangle, cette médiane vaut la **moitié** de l'hypoténuse ✓d) **Équation de (BC)** : elle passe par (60; 0) et (0; 45) ✓— **Pente** : $\frac{45-0}{0-60} = -\frac{3}{4}$ ✓— **Équation** : $y = -\frac{3}{4}x + 45$ ✓— **Contrôle en B** : $-45 + 45 = 0$ ✓— **Sommet mobile** : $\left(x; -\frac{3}{4}x + 45\right)$ avec $0 \leq x \leq 60$ ✓— **Aire du bassin** :

$$A(x) = x\left(-\frac{3}{4}x + 45\right) = -\frac{3}{4}x^2 + 45x$$

— **Trinôme** : $a = -\frac{3}{4} < 0$, il y a un maximum ✓— **Abscisse du sommet** : $x = \frac{45}{2 \times \frac{3}{4}} = \frac{45}{1,5} = 30$ ✓— **Hauteur correspondante** : $-22,5 + 45 = 22,5$ ✓— **Aire maximale** :

$$A(30) = 30 \times 22,5 = 675 \text{ m}^2$$

— **Contrôles voisins** : $A(25) = 25 \times 26,25 = 656,25$ ✓— **Et** : $A(35) = 35 \times 18,75 = 656,25$ ✓— **Comparaison** : les deux sont inférieurs à 675 ✓— **Rapport à l'aire du terrain** : $\frac{675}{1350} = \frac{1}{2}$ ✓— **Conclusion remarquable** : le bassin optimal occupe la **moitié** du terrain, et son sommet mobile est le milieu de [BC] — donc aussi l'emplacement du puits ✓

Réponse. a) 1350 m^2 , périmètre 180 m , $BC = 75 \text{ m}$ · b) $P(30; 22,5)$, à $37,5 \text{ m}$ des trois sommets · c) au milieu de $[BC]$, soit $(30; 22,5)$ · d) 675 m^2 , pour un bassin de 30 par $22,5 \text{ m}$.