Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : lieux, optimisation et modélisation

Géométrie repérée — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Traduire une condition en équation. On pose $M(x\,;y)$, on écrit la condition, on développe, on simplifie.

Condition sur M	Ensemble obtenu
$MA = MB$	la **médiatrice** de $[AB]$
$MA = r$	le **cercle** de centre A et rayon r
$MA \leq r$	le **disque** fermé
$MA^2 + MB^2 = k$	un cercle de centre le milieu de $[AB]$ (ou un point, ou rien)
M équidistant de deux axes	deux droites, $y = x$ et $y = -x$

Le réflexe des carrés. On écrit toujours MA^2, jamais MA : les racines disparaissent et l'équation devient exploitable. Les termes x^2 et y^2 s'éliminent quand les deux membres en contiennent autant — c'est le cas d'une médiatrice.

Optimiser une distance. Deux techniques en Seconde :

— la **réflexion** : pour minimiser $MA + MB$ avec M sur une droite, on remplace A par son symétrique A' par rapport à cette droite ; le minimum vaut $A'B$;

— la **perpendiculaire** : la distance d'un point à une droite est atteinte au **pied de la perpendiculaire** menée de ce point ; en repère, on le trouve en minimisant AM^2 pour M sur la droite.

Optimiser une aire. On exprime l'aire en fonction d'une variable. Quand l'énoncé fournit une écriture du type $k - c(x-\alpha)^2$ avec $c > 0$, on la vérifie en développant ; un carré étant positif ou nul,

$$k - c(x-\alpha)^2 \leq k$$

avec égalité pour $x = \alpha$: le maximum vaut k.

Vérifier une réponse d'optimisation. On teste deux ou trois valeurs proches de l'optimum : elles doivent donner un résultat **moins bon**.

Correction de l'exercice 1 – Un lieu de points : la médiatrice

Un point $M(x\,;y)$ est équidistant de A et B si et seulement si $MA^2 = MB^2$:

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = (x-7)^2 + (y+2)^2$$

En développant, les termes x^2 et y^2 s'éliminent : $-2x - 8y + 17 = -14x + 4y + 53$, soit $12x - 12y - 36 = 0$, c'est-à-dire $y = x - 3$. L'ensemble cherché est une **droite**, la médiatrice de $[AB]$.

Contrôle : le milieu de $[AB]$, $(4\,;1)$, vérifie $1 = 4 - 3$. Le point $(0\,;-3)$ aussi, et l'on a bien $MA^2 = 1 + 49 = 50 = 49 + 1 = MB^2$.

Réponse. La droite $y = x - 3$, médiatrice de $[AB]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Un lieu de points : le cercle

On écrit la condition avec $M(x\,;y)$:

$$MA^2 + MB^2 = (x+3)^2 + y^2 + (x-3)^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 18$$

car les termes $6x$ et $-6x$ s’annulent. La condition devient $2x^2 + 2y^2 + 18 = 50$, soit $x^2 + y^2 = 16$.

Or $x^2 + y^2 = OM^2$: la condition s’écrit $OM^2 = 16$, c’est-à-dire $OM = 4$. L’ensemble cherché est le **cercle de centre** O **et de rayon** 4 ; O est le milieu de $[AB]$.

Contrôle avec $M(0\,;4)$: $MA^2 = 9 + 16 = 25$ et $MB^2 = 25$, de somme 50. Au point O, on obtient seulement $9 + 9 = 18$.

Réponse. Le cercle de centre O et de rayon 4 (les points tels que $x^2 + y^2 = 16$).

Correction de l’exercice 3 – Points équidistants des deux axes

La distance d’un point $M(x\,;y)$ à l’axe des ordonnées est $|x|$, à l’axe des abscisses $|y|$. La condition $|x| = |y|$ signifie $y = x$ ou $y = -x$: l’ensemble est formé des deux droites d’équations $y = x$ et $y = -x$, les bissectrices des axes.

On ajoute la condition $OM = 5$, soit $x^2 + y^2 = 25$. Sur la droite $y = x$:

$$x^2 + x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 12{,}5 \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

d’où deux points, et deux autres sur $y = -x$: quatre points en tout, d’abscisses $\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \approx \pm 3{,}54$. Ils forment un carré inscrit dans le cercle de rayon 5.

Réponse. Les droites $y = x$ et $y = -x$; avec la seconde condition, quatre points d’abscisses $\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Correction de l’exercice 4 – Minimiser une somme de distances

On utilise la symétrie par rapport à la route. Le symétrique de A est $A'(0\,;-4)$, et pour tout point M de la route, $MA = MA'$. Minimiser $MA + MB$ revient à minimiser $MA' + MB$, qui est le plus petit quand M est sur le segment $[A'B]$.

La droite $(A'B)$ a pour coefficient directeur $\dfrac{6+4}{10} = 1$ et pour ordonnée à l’origine -4 : $y = x - 4$. Elle coupe l’axe des abscisses en $x = 4$.

$$M(4\,;0) \qquad MA + MB = A'B = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14$$

Vérification : $MA = 4\sqrt{2}$ et $MB = 6\sqrt{2}$. Avec $M'(5\,;0)$ ou $M''(3\,;0)$, on obtient environ $14{,}21$ et $14{,}22$, plus.

Réponse. $M(4\,;0)$, avec $MA + MB = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14$.

Correction de l’exercice 5 – Aire maximale d’un rectangle inscrit

a) Le demi-périmètre vaut 10, donc la hauteur vaut $10 - t$, avec $0 \le t \le 10$, et $A(t) = t(10 - t) = 10t - t^2$.

b) En développant, $25 - (t-5)^2 = 25 - t^2 + 10t - 25 = 10t - t^2$. Un carré est positif ou nul, donc

$$A(t) = 25 - (t-5)^2 \le 25$$

avec égalité pour $t = 5$. L’aire maximale vaut 25, pour un rectangle de 5 sur 5 : un **carré**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : $A(4) = A(6) = 24 < 25$. À périmètre fixé, c'est le carré qui offre la plus grande aire.

Réponse. a) hauteur $10 - t$, $A(t) = t(10 - t)$ · b) $t = 5$, aire maximale 25 (un carré).

Correction de l'exercice 6 – Distance minimale à une droite

a) $AM^2 = (t-5)^2 + (2t-0)^2 = t^2 - 10t + 25 + 4t^2 = 5t^2 - 10t + 25$.

b) En développant, $5(t-1)^2 + 20 = 5t^2 - 10t + 5 + 20 = 5t^2 - 10t + 25$. Un carré est positif ou nul, donc

$$AM^2 = 5(t-1)^2 + 20 \geq 20$$

avec égalité pour $t = 1$. Le point le plus proche est $M(1\,;2)$, et la distance minimale vaut $\sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$.

Contrôle : $t = 0$ et $t = 2$ donnent $AM^2 = 25 > 20$. De plus $AM^2 + OM^2 = 20 + 5 = 25 = OA^2$: le triangle OMA est rectangle en M, M est bien le pied de la perpendiculaire.

Réponse. a) en développant · b) $M(1\,;2)$, à distance $2\sqrt{5} \approx 4{,}47$.

Correction de l'exercice 7 – Zone de couverture

Sur l'axe des abscisses, l'antenne A couvre les points à moins de 6 km de l'origine, soit l'intervalle $[-6\,;6]$; l'antenne B couvre $[9-5\,;9+5] = [4\,;14]$.

Les points couverts par au moins une antenne forment la **réunion** des deux intervalles ; comme ils se chevauchent,

$$[-6\,;6] \cup [4\,;14] = [-6\,;14]$$

soit 20 km de route. Les points couverts par les deux antennes forment l'**intersection**, $[4\,;6]$, soit 2 km.

Contrôle : $12 + 10 - 2 = 20$, la portion commune n'étant comptée qu'une fois.

Réponse. Au moins une antenne : $[-6\,;14]$, soit 20 km · les deux : $[4\,;6]$, soit 2 km.

Correction de l'exercice 8 – Découpe optimale

a) La droite (BC) a pour coefficient directeur $\dfrac{8-0}{0-12} = -\dfrac{2}{3}$ et pour ordonnée à l'origine 8 (elle passe par C). Le rectangle a pour largeur x et pour hauteur l'ordonnée de M :

$$A(x) = x\left(-\frac{2}{3}x + 8\right) = -\frac{2}{3}x^2 + 8x \qquad 0 \leq x \leq 12$$

b) En développant, $24 - \dfrac{2}{3}(x-6)^2 = 24 - \dfrac{2}{3}x^2 + 8x - 24 = -\dfrac{2}{3}x^2 + 8x$. Comme $(x-6)^2 \geq 0$, $A(x) \leq 24$, avec égalité pour $x = 6$.

Le rectangle optimal mesure 6 sur $-4 + 8 = 4$, d'aire 24, soit la moitié de l'aire du triangle (48). Son sommet $M(6\,;4)$ est le milieu de $[BC]$.

Réponse. a) $A(x) = x\left(-\dfrac{2}{3}x + 8\right)$ · b) 6 par 4, pour une aire maximale de 24, la moitié du triangle.

Correction de l'exercice 9 – Un point trois fois plus loin

Un point de l'axe s'écrit $M(x\,;0)$; ses distances à A et B sont $MA = |x|$ et $MB = |x-4|$. La condition s'écrit $|x| = 3|x-4|$.

Deux nombres ont la même valeur absolue quand ils sont égaux ou opposés :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$x = 3(x-4) \Leftrightarrow x = 6 \qquad \text{ou} \qquad x = -3(x-4) \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$$

Les points cherchés sont $M_1(3\,;0)$ et $M_2(6\,;0)$. **Vérification** : pour M_1, $MA = 3$ et $MB = 1$; pour M_2, $MA = 6$ et $MB = 2$. Les deux points sont du côté de B, ce qui est logique : ils sont trois fois plus près de B que de A.

Réponse. $M_1(3\,;0)$ et $M_2(6\,;0)$.

Correction de l’exercice 10 – Trajet optimal entre deux points

On utilise la symétrie par rapport à la droite $y = 6$, appliquée à B : son symétrique est $B'(8\,;10)$ (le milieu de $[BB']$, $(8\,;6)$, est sur la droite). Pour tout point M de la droite, $MB = MB'$, donc il s’agit de minimiser $AM + MB'$, ce qui arrive quand M est sur le segment $[AB']$.

La droite (AB') passe par l’origine avec le coefficient directeur $\dfrac{10}{8} = 1{,}25$: $y = 1{,}25x$. Elle coupe la droite $y = 6$ pour $x = \dfrac{6}{1{,}25} = 4{,}8$.

$$M(4{,}8\,;6) \qquad AM + MB = AB' = \sqrt{64 + 100} = 2\sqrt{41} \approx 12{,}81$$

Vérification : avec $M'(4\,;6)$, le trajet mesure environ 12,87. C’est la loi de la réflexion de la lumière.

Réponse. $M(4{,}8\,;6)$, pour un trajet de $2\sqrt{41} \approx 12{,}81$.

Correction de l’exercice 11 – Aire en fonction d’un paramètre

a) Les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont sur les axes : le triangle est rectangle en A, de côtés t et $10 - t$.

$$A(t) = \frac{t(10-t)}{2}$$

b) En développant, $25 - (t-5)^2 = 25 - t^2 + 10t - 25 = 10t - t^2 = t(10-t)$. Comme $(t-5)^2 \geq 0$, $A(t) \leq \dfrac{25}{2} = 12{,}5$, avec égalité pour $t = 5$.

Le triangle d’aire maximale est rectangle isocèle, de côtés 5. **Contrôle** : $A(4) = A(6) = 12$. La somme des deux côtés étant fixée, l’aire est maximale quand ils sont égaux.

Réponse. a) $A(t) = \dfrac{t(10-t)}{2}$ · b) maximum 12,5, pour $t = 5$.

Correction de l’exercice 12 – Un point sur un cercle

Un point $M(x\,;y)$ est sur le cercle si et seulement si $OM = 5$, soit $x^2 + y^2 = 25$. On ajoute la condition $x = 2y$:

$$(2y)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow 5y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 5 \Leftrightarrow y = \sqrt{5} \text{ ou } y = -\sqrt{5}$$

Les abscisses correspondantes sont $2\sqrt{5}$ et $-2\sqrt{5}$: les points sont $\left(2\sqrt{5}\,;\sqrt{5}\right)$ et $\left(-2\sqrt{5}\,;-\sqrt{5}\right)$, soit environ $(4{,}47\,;2{,}24)$ et $(-4{,}47\,;-2{,}24)$.

Contrôle : $20 + 5 = 25$. Les deux points sont symétriques par rapport à O : ce sont les extrémités d’un diamètre, porté par la droite $y = \dfrac{x}{2}$.

Réponse. $\left(2\sqrt{5}\,;\sqrt{5}\right)$ et $\left(-2\sqrt{5}\,;-\sqrt{5}\right)$, soit environ $(\pm 4{,}47\,;\pm 2{,}24)$.

Correction de l’exercice 13 – Un lieu vide

On écrit la condition avec $M(x\,;y)$; les termes $8x$ et $-8x$ s’annulent :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$MA^2 + MB^2 = (x+4)^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 32$$

La condition devient $2x^2 + 2y^2 + 32 = 10$, soit $x^2 + y^2 = -11$. Or une somme de carrés est positive ou nulle : c'est impossible. L'ensemble est **vide**.

On peut le voir autrement : $MA^2 + MB^2 = 2OM^2 + 32 \geq 32$, avec égalité au milieu O de $[AB]$. La valeur 10, inférieure à 32, ne peut jamais être atteinte. Avec 50 au lieu de 10, on obtiendrait $OM^2 = 9$, le cercle de centre O et de rayon 3.

Réponse. L'ensemble est **vide** : la valeur minimale de $MA^2 + MB^2$ est $32 > 10$.

Correction de l'exercice 14 – Le plus court chemin par un pont

Le pont étant vertical et de longueur 1, on va de A au point $(p\,;1)$, on traverse, puis on va de $(p\,;0)$ à B. La longueur du pont ne dépend pas de p : il faut minimiser la somme des deux trajets terrestres.

Astuce : on translate B de 1 vers le haut, en $B'(12\,;-2)$. Le trajet de $(p\,;0)$ à B a la même longueur que celui de $(p\,;1)$ à B'. On cherche donc le point $(p\,;1)$ qui minimise la distance $A \to (p\,;1) \to B'$: il est sur le segment $[AB']$.

La droite (AB') a pour équation $y = -\dfrac{7}{12}x + 5$; elle coupe la droite $y = 1$ pour $\dfrac{7}{12}x = 4$, soit $p = \dfrac{48}{7} \approx 6{,}86$.

$$\text{trajet minimal} = AB' + 1 = \sqrt{144 + 49} + 1 = \sqrt{193} + 1 \approx 14{,}89$$

Réponse. Le pont en $x = \dfrac{48}{7} \approx 6{,}86$, pour un trajet total de $\sqrt{193} + 1 \approx 14{,}89$.

Correction de l'exercice 15 – Cercle et tangente commune

Une droite horizontale $y = k$ est tangente à un cercle quand sa distance au centre, l'écart des ordonnées, vaut le rayon. Pour le premier cercle (centre $(0\,;0)$, rayon 3), cela donne $y = 3$ et $y = -3$; pour le second (centre $(10\,;0)$, rayon 2), $y = 2$ et $y = -2$.

$$\{3\,;-3\} \cap \{2\,;-2\} = \varnothing$$

Aucune droite horizontale n'est tangente aux deux : c'est impossible, parce que les deux centres sont à la même hauteur et que les rayons diffèrent. Avec deux rayons égaux à 3, les droites $y = 3$ et $y = -3$ conviendraient.

Les cercles sont disjoints ($10 > 3 + 2$) : il existe bien des droites tangentes aux deux, mais elles sont obliques.

Réponse. Impossible : une horizontale tangente est à distance r du centre, et $3 \neq 2$.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : aménagement d'un terrain

a) Le triangle est rectangle en A, ses côtés $[AB]$ et $[AC]$ étant sur les axes. Son aire vaut $\dfrac{60 \times 45}{2} = 1\,350$ m², et $BC = \sqrt{3\,600 + 2\,025} = \sqrt{5\,625} = 75$ m. Périmètre : $60 + 45 + 75 = 180$ m.

b) Le point équidistant des trois sommets est le centre du cercle circonscrit. Dans un triangle rectangle, c'est le milieu de l'hypoténuse : $P(30\,;22{,}5)$, à $\dfrac{75}{2} = 37{,}5$ m de chaque sommet.

c) Les triangles ABM et AMC ont la même hauteur issue de A : leurs aires sont égales quand M est le milieu de $[BC]$, soit encore $(30\,;22{,}5)$, l'emplacement du puits.

d) (BC) a pour équation $y = -0{,}75x + 45$, donc l'aire du bassin vaut $x(-0{,}75x + 45) = -0{,}75x^2 + 45x$. En développant,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$675 - 0{,}75(x-30)^2 = 675 - 0{,}75x^2 + 45x - 675$, la même expression.

$$A(x) = 675 - 0{,}75(x-30)^2 \leq 675$$

L'aire maximale vaut 675 m², pour $x = 30$: un bassin de 30 m sur 22,5 m, la moitié du terrain.

Réponse. a) 1350 m², périmètre 180 m, $BC = 75$ m · b) $P(30\,;22{,}5)$, à 37,5 m des trois sommets · c) au milieu de $[BC]$, soit $(30\,;22{,}5)$ · d) 675 m², pour un bassin de 30 par 22,5 m.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).