Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : lieux, optimisation et modélisation

Géométrie repérée — Seconde

Exercices

Méthode

On cherche des **ensembles de points** (droites, cercles), on **optimise** une distance ou une aire, et l'on modélise des situations concrètes — antennes, trajets, découpes. Chaque problème demande de traduire un énoncé en français par une condition sur les coordonnées.

Exercice 1 – Un lieu de points : la médiatrice

Déterminer l'ensemble des points M équidistants de $A(1\,;4)$ et $B(7\,;-2)$.

Exercice 2 – Un lieu de points : le cercle

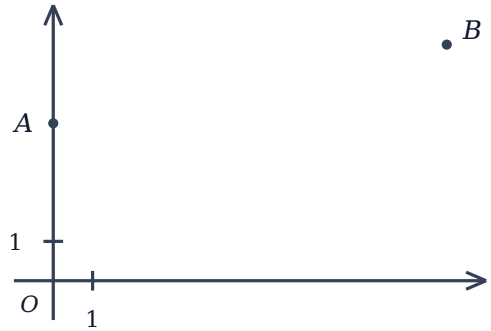
Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 50$, avec $A(-3\,;0)$ et $B(3\,;0)$.

Exercice 3 – Points équidistants des deux axes

Déterminer l'ensemble des points à égale distance des deux axes de coordonnées, puis ceux qui sont en outre à distance 5 de l'origine.

Exercice 4 – Minimiser une somme de distances

Deux villages sont en $A(0\,;4)$ et $B(10\,;6)$, et une route rectiligne suit l'axe des abscisses. Où placer une station M sur la route pour que $MA + MB$ soit minimal ?



Les deux villages ; la route suit l'axe des abscisses

Exercice 5 – Aire maximale d'un rectangle inscrit

Un rectangle a un sommet à l'origine, deux côtés sur les axes, une largeur t et un périmètre imposé de 20.

a) Exprimer sa hauteur, puis son aire $A(t)$, en fonction de t.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Vérifier que $A(t) = 25 - (t-5)^2$, puis déterminer t pour que l'aire soit maximale.

Exercice 6 – Distance minimale à une droite

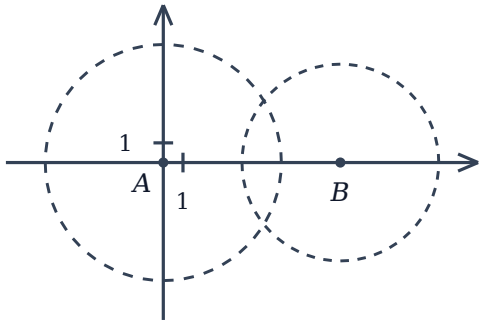
Soit $A(5\,;0)$ et, pour tout réel t, $M(t\,;2t)$ un point de la droite d'équation $y = 2x$.

a) Montrer que $AM^2 = 5t^2 - 10t + 25$.

b) Vérifier que $5t^2 - 10t + 25 = 5(t-1)^2 + 20$, puis en déduire le point de la droite le plus proche de A et cette distance minimale.

Exercice 7 – Zone de couverture

Une antenne en $A(0\,;0)$ couvre 6 km, une autre en $B(9\,;0)$ couvre 5 km. Déterminer la portion de l'axe des abscisses couverte par au moins une antenne, et celle couverte par les deux.



Les zones couvertes : 6 km autour de A, 5 km autour de B

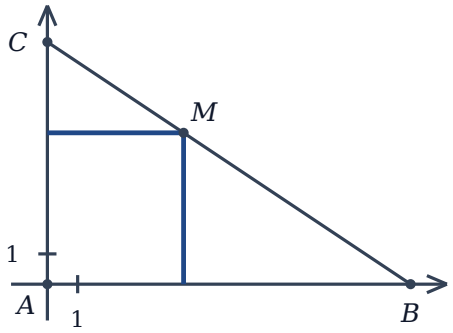
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Découpe optimale

Dans le triangle $A(0\,;0)$, $B(12\,;0)$, $C(0\,;8)$, on inscrit un rectangle ayant un sommet en A, deux côtés sur les axes et le quatrième sommet M sur $[BC]$.

a) Montrer que la droite (BC) a pour équation $y = -\frac{2}{3}x + 8$, puis exprimer l'aire $A(x)$ du rectangle en fonction de l'abscisse x de M.

b) Vérifier que $A(x) = 24 - \frac{2}{3}(x-6)^2$, puis déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale.



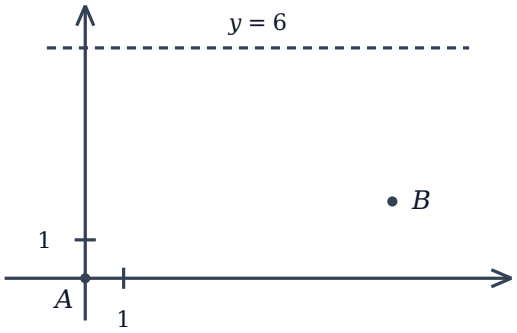
Un rectangle inscrit, de sommet M sur [BC]

Exercice 9 – Un point trois fois plus loin

Soit $A(0\,;0)$ et $B(4\,;0)$. Déterminer les points M de l'axe des abscisses tels que $MA = 3MB$.

Exercice 10 – Trajet optimal entre deux points

Un livreur part de $A(0\,;0)$, doit toucher la droite $y = 6$, puis rejoindre $B(8\,;2)$. Déterminer le point de contact qui minimise le trajet, puis la longueur minimale.



Le départ A, l'arrivée B et la droite à toucher

Exercice 11 – Aire en fonction d'un paramètre

Soit $A(0\,;0)$, $B(t\,;0)$ et $C(0\,;10-t)$ avec $0 < t < 10$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Exprimer l'aire $A(t)$ du triangle ABC en fonction de t.

b) Vérifier que $A(t) = \dfrac{25 - (t-5)^2}{2}$, puis déterminer sa valeur maximale.

Exercice 12 – Un point sur un cercle

Déterminer les points du cercle de centre O et de rayon 5 dont l'abscisse est le double de l'ordonnée.

Exercice 13 – Un lieu vide

Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 10$, avec $A(-4\,;0)$ et $B(4\,;0)$.

Exercice 14 – Le plus court chemin par un pont

Deux points $A(0\,;5)$ et $B(12\,;-3)$ sont séparés par une rivière modélisée par la bande $0 \leq y \leq 1$. Un pont vertical de longueur 1 peut être placé n'importe où. Où le placer pour minimiser le trajet total ?

Exercice 15 – Cercle et tangente commune

Les cercles de centres $A(0\,;0)$ et $B(10\,;0)$ ont pour rayons 3 et 2. Montrer qu'une droite horizontale peut être tangente aux deux, et déterminer laquelle.

Exercice 16 – Synthèse : aménagement d'un terrain

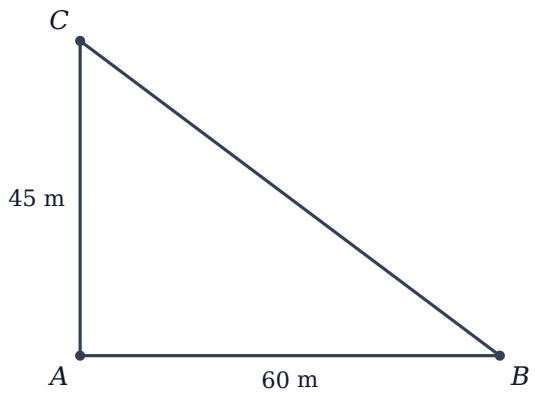
Un terrain triangulaire a pour sommets $A(0\,;0)$, $B(60\,;0)$ et $C(0\,;45)$ (unité : le mètre).

a) Calculer son aire, son périmètre et la longueur de $[BC]$.

b) Un puits doit être équidistant de A, B et C. Où le placer ?

c) Une clôture rectiligne partant de A doit partager le terrain en deux parties d'aires égales. Où atteint-elle $[BC]$?

d) On inscrit un bassin rectangulaire de sommet A, côtés sur les axes, quatrième sommet sur $[BC]$. En notant x sa largeur, vérifier que son aire vaut $675 - 0{,}75(x-30)^2$, puis donner son aire maximale.



Le terrain triangulaire

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).