

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : lieux, optimisation et modélisation

Géométrie repérée — Seconde

Exercices

Méthode

On cherche des **ensembles de points** (droites, cercles), on **optimise** une distance ou une aire, et l'on modélise des situations concrètes — antennes, trajets, découpes. Chaque problème demande de traduire un énoncé en français par une condition sur les coordonnées.

Exercice 1 - Un lieu de points : la médiatrice

Déterminer l'ensemble des points M équidistants de $A(1 ; 4)$ et $B(7 ; -2)$.

Exercice 2 - Un lieu de points : le cercle

Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 50$, avec $A(-3 ; 0)$ et $B(3 ; 0)$.

Exercice 3 - Points équidistants des deux axes

Déterminer l'ensemble des points à égale distance des deux axes de coordonnées, puis ceux qui sont en outre à distance 5 de l'origine.

Exercice 4 - Minimiser une somme de distances

Deux villages sont en $A(0 ; 4)$ et $B(10 ; 6)$, et une route rectiligne suit l'axe des abscisses. Où placer une station M sur la route pour que $MA + MB$ soit minimal ?

Exercice 5 - Aire maximale d'un rectangle inscrit

Un rectangle a un sommet à l'origine, deux côtés sur les axes, une largeur t et un périmètre imposé de 20. Déterminer t pour que son aire soit maximale.

Exercice 6 - Distance minimale à une droite

Déterminer le point de la droite $y = 2x$ le plus proche de $A(5 ; 0)$, puis cette distance minimale.

Exercice 7 - Zone de couverture

Une antenne en $A(0 ; 0)$ couvre 6 km, une autre en $B(9 ; 0)$ couvre 5 km. Déterminer la portion de l'axe des abscisses couverte par au moins une antenne, et celle couverte par les deux.

Exercice 8 - Découpe optimale

Dans le triangle $A(0; 0)$, $B(12; 0)$, $C(0; 8)$, on inscrit un rectangle ayant un sommet en A , deux côtés sur les axes et le quatrième sommet sur $[BC]$. Déterminer ses dimensions pour une aire maximale.

Exercice 9 - Lieu d'un point à distance double

Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA = 3MB$, avec $A(0; 0)$ et $B(4; 0)$.

Exercice 10 - Trajet optimal entre deux points

Un livreur part de $A(0; 0)$, doit toucher la droite $y = 6$, puis rejoindre $B(8; 2)$. Déterminer le point de contact qui minimise le trajet, puis la longueur minimale.

Exercice 11 - Aire en fonction d'un paramètre

Soit $A(0; 0)$, $B(t; 0)$ et $C(0; 10 - t)$ avec $0 < t < 10$. Exprimer l'aire de ABC puis déterminer sa valeur maximale.

Exercice 12 - Un point sur un cercle

Déterminer les points du cercle $x^2 + y^2 = 25$ dont l'abscisse est le double de l'ordonnée.

Exercice 13 - Un lieu vide

Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 10$, avec $A(-4; 0)$ et $B(4; 0)$.

Exercice 14 - Le plus court chemin par un pont

Deux points $A(0; 5)$ et $B(12; -3)$ sont séparés par une rivière modélisée par la bande $0 \leq y \leq 1$. Un pont vertical de longueur 1 peut être placé n'importe où. Où le placer pour minimiser le trajet total ?

Exercice 15 - Cercle et tangente commune

Les cercles de centres $A(0; 0)$ et $B(10; 0)$ ont pour rayons 3 et 2. Montrer qu'une droite horizontale peut être tangente aux deux, et déterminer laquelle.

Exercice 16 - Synthèse : aménagement d'un terrain

Un terrain triangulaire a pour sommets $A(0; 0)$, $B(60; 0)$ et $C(0; 45)$ (unité : le mètre).

- Calculer son aire, son périmètre et la longueur de $[BC]$.
- Un puits doit être équidistant de A , B et C . Où le placer ?
- Une clôture rectiligne partant de A doit partager le terrain en deux parties d'aires égales. Où atteint-elle $[BC]$?
- On veut inscrire un bassin rectangulaire de sommet A , côtés sur les axes, quatrième sommet sur $[BC]$. Quelle est son aire maximale ?