

Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : proportions et évolutions en contexte

Information chiffrée – Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Boîte à outils de l'information chiffrée.

— Proportion : $p = \frac{n_A}{n_E}$; pourcentage de pourcentage : $p = p_1 \times p_2$.

— Évolution : $CM = \frac{V_2}{V_1} = 1 + t$.

— Évolutions successives et réciproque :

$$CM = CM_1 \times CM_2 \times \dots \quad CM' = \frac{1}{CM}$$

— Grandeur produit : si $G = A \times B$, alors $CM_G = CM_A \times CM_B$ (chiffre d'affaires = prix $\times$ quantité, aire = longueur $\times$ largeur).

— Proportion qui évolue : $p_2 = \frac{n_{A,2}}{n_{E,2}}$, donc $CM_p = \frac{CM_A}{CM_E}$.

— Écart de deux proportions : en **points** ; évolution d'une proportion : en **pourcentage**.

— Taux identique sur deux périodes qui donne $CM : 1 + t = \sqrt{CM}$.

Correction de l'exercice 1 – Électricité renouvelable

La grandeur qui évolue est une proportion.

— **En points** : $22 - 19 = 3$ points de pourcentage.

— **En pourcentage** : on calcule le taux d'évolution de cette part,

$$t = \frac{22 - 19}{19} = \frac{3}{19} \approx 0,1579$$

soit une hausse d'environ 15,8 %.

Conclusion. « La part des renouvelables a augmenté de 3 points », ou « de près de 16 % » : les deux phrases sont justes ; « de 3 % » serait faux.

Réponse. +3 points, soit environ +15,8 %.

Correction de l'exercice 2 – Une population qui vieillit

Par les effectifs.

— moins de 20 ans au départ : $0,25 \times 40\,000 = 10\,000$; dix ans plus tard :
 $10\,000 \times 1,04 = 10\,400$;

— population : $40\,000 \times 1,12 = 44\,800$.

$$p_2 = \frac{10\,400}{44\,800} \approx 0,2321$$

Par les coefficients. Le numérateur est multiplié par 1,04 et le dénominateur par 1,12 :

$$p_2 = 0,25 \times \frac{1,04}{1,12} \approx 0,2321.$$

La part des moins de 20 ans passe de 25 % à environ 23,2 % (environ –1,8 point), alors que leur nombre a augmenté : la population totale a crû plus vite.

Réponse. Environ 23,2 %.

Correction de l'exercice 3 – Soldes et carte de fidélité

Les deux remises successives correspondent aux coefficients 0,8 et 0,9 :

$$CM = 0,8 \times 0,9 = 0,72$$

Le client fidèle paie 72 % du prix, soit une remise globale de 28 %.

Le concurrent propose $CM = 0,72$ également : les deux offres sont **identiques**. On aurait pu croire que « 20 % + 10 % » faisait 30 % : la seconde remise portant sur un prix déjà réduit, elle ne vaut que 10 % de 80 %, soit 8 points.

Réponse. Offres identiques : –28 % dans les deux cas.

Correction de l'exercice 4 – Facture d'électricité

Le montant est un produit : montant = consommation $\times$ prix du kWh. Son coefficient multiplicateur est le produit des coefficients :

$$CM = 1,08 \times 1,15 = 1,242$$

Le montant a augmenté de 24,2 %.

Contrôle. 4 000 kWh à 0,25 € coûtaient 1 000 € ; 4 320 kWh à 0,287 5 € coûtent 1 242 €. Additionner les taux (8 + 15 = 23 %) sous-estimerait la hausse.

Réponse. +24,2 %.

Correction de l'exercice 5 – Prix et quantités vendues

Le chiffre d'affaires est le produit du prix par la quantité vendue. Son coefficient multiplicateur est donc

$$CM = 1,1 \times 0,9 = 0,99$$

Le chiffre d'affaires **baisse de 1 %** : il n'est pas inchangé.

Contrôle. 1 000 articles à 20 € rapportent 20 000 € ; 900 articles à 22 € rapportent 19 800 €, soit 1 % de moins.

Réponse. Non : il baisse de 1 %.

Correction de l'exercice 6 – Agrandir un terrain

L'aire est le produit de la longueur et de la largeur, chacune multipliée par 1,1 :

$$CM_{\text{aire}} = 1,1 \times 1,1 = 1,21$$

L'aire augmente de 21 %.

Le périmètre $2(L + l)$ est une **somme** : si L et l sont multipliés par 1,1, alors $2(1,1L + 1,1l) = 1,1 \times 2(L + l)$. Le périmètre augmente de 10 % seulement.

Exemple. Un terrain de 30 m sur 20 m (600 m, périmètre 100 m) devient 33 m sur 22 m (726 m, périmètre 110 m).

Réponse. Aire : +21 % ; périmètre : +10 %.

Correction de l'exercice 7 – Même taux deux années de suite

On note t le taux annuel. Deux évolutions identiques donnent le coefficient global $(1 + t)^2$:

$$(1 + t)^2 = 1,21$$

Comme $1 + t > 0$, on prend la racine carrée :

$$1 + t = \sqrt{1,21} = 1,1$$

donc $t = 0,1$: les ventes ont augmenté de 10 % par an.

Piège. Diviser 21 % par 2 donne 10,5 %, ce qui est faux : $1,105^2 \approx 1,221$, soit +22,1 %.

Réponse. 10 % par an.

Correction de l'exercice 8 - Remise avant ou après la TVA

Les deux opérations sont des multiplications : remise $\times 0,85$ et TVA $\times 1,2$.

— Remise puis TVA : $200 \times 0,85 = 170$ €, puis $170 \times 1,2 = 204$ €.

— TVA puis remise : $200 \times 1,2 = 240$ €, puis $240 \times 0,85 = 204$ €.

Dans les deux cas :

$$200 \times 0,85 \times 1,2 = 204 \text{ €}$$

L'ordre ne change pas le prix payé, car un produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs. Le client paie 1,02 fois le prix HT.

Réponse. Non : 204 € dans les deux cas.

Correction de l'exercice 9 - Reconquérir des voyageurs

La perte correspond à $CM = 0,8$. Pour revenir au niveau initial, il faut un coefficient global

$$CM' = \frac{1}{0,8} = 1,25$$

réparti en deux hausses identiques de coefficient $1 + t$:

$$(1 + t)^2 = 1,25 \quad \text{donc} \quad 1 + t = \sqrt{1,25} \approx 1,118$$

Il faut viser une hausse d'environ 11,8 % par an.

Contrôle. $0,8 \times 1,118^2 \approx 0,8 \times 1,25 = 1$.

Réponse. Environ +11,8 % par an.

Correction de l'exercice 10 - Recrutement et proportion de femmes

On raisonne sur les effectifs, puis on recalcule la proportion :

$$p = \frac{n_A}{n_E}$$

— femmes au départ : $0,35 \times 1\,200 = 420$;

— femmes recrutées : $0,6 \times 100 = 60$;

— après recrutement : 480 femmes sur 1 300 salariés.

$$p_2 = \frac{480}{1\,300} \approx 0,3692$$

La proportion passe de 35 % à environ 36,9 %, soit environ +1,9 point. Un recrutement très féminisé ne fait monter la proportion que lentement, car il pèse peu face à l'effectif existant.

Réponse. Environ 36,9 %, soit environ +1,9 point.

Correction de l'exercice 11 - Croissance d'une commune

Cinq hausses identiques de coefficient 1,02 :

$$P_5 = 15\,000 \times 1,02^5$$

À la calculatrice, $1,02^5 \approx 1,104\,08$, d'où $P_5 \approx 16\,561,2$: environ 16 561 habitants.

Taux global : $1,104\,08 - 1 \approx 0,104\,1$, soit environ +10,4 %, un peu plus que $5 \times 2 = 10\%$.

Réponse. Environ 16 561 habitants ; environ +10,4 %.

Correction de l'exercice 12 - Améliorer un chrono

« Améliorer un temps » le fait **baisser** : coefficients 0,98 puis 0,97.

$$CM = 0,98 \times 0,97 = 0,950\,6$$

Temps final : $50 \times 0,950\,6 = 47,53$ s.

Évolution globale : $0,950\,6 - 1 = -0,049\,4$: il a amélioré son temps de 4,94 %, un peu moins que 5 %.

Contrôle. $50 \times 0,98 = 49$ s, puis $49 \times 0,97 = 47,53$ s.

Réponse. 47,53 s, soit une amélioration de 4,94 %.

Correction de l'exercice 13 - Baisser le prix pour vendre plus

a) $CM = 0,85$: nouveau prix $399 \times 0,85 = 339,15$ €.

b) Le chiffre d'affaires est le produit du prix par le nombre de téléphones vendus :

$$CM_{CA} = CM_{\text{prix}} \times CM_{\text{ventes}} = 0,85 \times 1,3 = 1,105$$

Le chiffre d'affaires augmente de 10,5 %. La baisse de prix est plus que compensée par la hausse des ventes.

Contrôle avec 1 000 téléphones. 399 000 € avant ; $1\,300 \times 339,15 = 440\,895$ € après, et $\frac{440\,895}{399\,000} = 1,105$.

Réponse. a) 339,15 € · b) +10,5 %.

Correction de l'exercice 14 - Demi-pensionnaires

Par les effectifs. $0,45 \times 600 = 270$ demi-pensionnaires, puis $270 \times 1,2 = 324$. Effectif : $600 \times 1,1 = 660$.

$$p_2 = \frac{324}{660} \approx 0,490\,9$$

Par les coefficients. $p_2 = 0,45 \times \frac{1,2}{1,1} \approx 0,490\,9$.

La proportion passe de 45 % à environ 49,1 %, soit environ +4,1 points. En pourcentage, elle a augmenté d'environ 9,1 % ($\frac{1,2}{1,1} \approx 1,091$).

Réponse. Environ 49,1 %, soit environ +4,1 points.

Correction de l'exercice 15 - Chômage et population active

a) Le taux de chômage est une proportion : chômeurs divisés par actifs. Le numérateur est multiplié par 0,95, le dénominateur par 1,01 :

$$p_2 = 0,08 \times \frac{0,95}{1,01} \approx 0,075\,25$$

soit environ 7,52 %. **Contrôle** : 2,4 millions de chômeurs deviennent 2,28 millions, pour

30,3 millions d'actifs, et $\frac{2,28}{30,3} \approx 0,075\,25$.

b) En points : $7,52 - 8 \approx -0,48$ point. En pourcentage : $\frac{0,95}{1,01} \approx 0,940\,6$, soit une baisse d'environ 5,9 % du taux de chômage.

Réponse. a) environ 7,52 % · b) environ −0,48 point, soit environ −5,9 %.