Plaquette 4 – Calcul littéral, identités remarquables et démonstrations

Nombres et calculs — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Développement.

$$k(a+b) = ka + kb \qquad (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Identités remarquables.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Factorisation. On cherche un **facteur commun**, ou l'une des trois identités lue **de droite à gauche**.

Forme repérée	Factorisation
$a^2 - b^2$	$(a+b)(a-b)$
$a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^2$

Écritures utiles en arithmétique.

— **pair** : $2k$ · **impair** : $2k+1$
— **multiple de** n : nk
— **deux entiers consécutifs** : n et $n+1$

Types de raisonnement.

But	Méthode
prouver « pour tout »	calcul littéral général
réfuter « pour tout »	**un** contre-exemple suffit
prouver « il existe »	exhiber un exemple
cas selon la parité	**disjonction de cas** ($n = 2k$ ou $n = 2k+1$)

Équation produit nul.

$$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

C'est **la** raison pour laquelle on factorise avant de résoudre.

Correction de l'exercice 1 – Développer

On reconnaît une identité remarquable pour A et B, la double distributivité pour C.

— $A = (2x+3)^2$, de la forme $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$:
$A = 4x^2 + 12x + 9$.
— $B = (x-5)(x+5) = x^2 - 25$, par $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
— C : on multiplie chaque terme du premier facteur par chaque terme du second.

$$C = 3x \times 2x + 3x \times 4 - 1 \times 2x - 1 \times 4 = 6x^2 + 10x - 4$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle en $x = 1$: $A = 5^2 = 25$ et $4 + 12 + 9 = 25$; $C = 2 \times 6 = 12$ et $6 + 10 - 4 = 12$. Oublier le double produit $12x$ dans A donnerait 13 au lieu de 25.

Réponse. $A = 4x^2 + 12x + 9 \cdot B = x^2 - 25 \cdot C = 6x^2 + 10x - 4$.

Correction de l'exercice 2 – Factoriser

Pour factoriser, on cherche d'abord un facteur commun, puis une identité remarquable.

— $A = 9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2$: différence de deux carrés, $A = (3x + 4)(3x - 4)$.

— $B = x^2 + 6x + 9$: $9 = 3^2$ et $6x = 2 \times x \times 3$, c'est un carré parfait, $B = (x + 3)^2$.

— $C = 4x^2 - 20x$: les deux termes contiennent $4x$, d'où $C = 4x(x - 5)$.

Contrôle en $x = 2$: $A = 36 - 16 = 20$ et $10 \times 2 = 20$; $B = 25 = 5^2$; $C = 16 - 40 = -24$ et $8 \times (-3) = -24$. Le terme central est décisif : $x^2 + 5x + 9$ n'est pas un carré parfait, car $2 \times 1 \times 3 = 6 \neq 5$.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Réponse. $A = (3x + 4)(3x - 4) \cdot B = (x + 3)^2 \cdot C = 4x(x - 5)$.

Correction de l'exercice 3 – Équation produit nul

Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul. Pour la première équation :

$$(2x - 6)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \text{ ou } x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -4$$

Pour la seconde, on factorise d'abord : $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, qui s'annule pour $x = 3$ ou $x = -3$.

Contrôle : $3^2 - 9 = 0$ et $(-3)^2 - 9 = 0$. On peut aussi écrire $x^2 = 9$, mais il ne faut pas oublier la solution négative : $x^2 = a$ avec $a > 0$ a toujours deux solutions, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Réponse. $S = \{-4\,;3\}$ et $S = \{-3\,;3\}$.

Correction de l'exercice 4 – Démontrer une identité

Par développement. $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ et $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$. On soustrait la seconde expression **entre parenthèses** :

$$\left(x^2 + 2x + 1\right) - \left(x^2 - 2x + 1\right) = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 4x$$

Par la différence de carrés, avec $a = x + 1$ et $b = x - 1$:
$[(x + 1) + (x - 1)][(x + 1) - (x - 1)] = 2x \times 2 = 4x$.

L'égalité est démontrée pour tout réel x. Des tests numériques ($x = 3$: $16 - 4 = 12$) peuvent la confirmer, mais seul le calcul littéral la prouve pour tous les x. Sans parenthèses, on trouverait faussement 2.

Réponse. $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = [2x][2] = 4x$.

Correction de l'exercice 5 – Somme de deux impairs

Un nombre impair s'écrit $2k + 1$ avec k entier. On prend deux impairs quelconques $a = 2k + 1$ et $b = 2m + 1$, avec **deux lettres différentes** pour ne pas les supposer égaux.

$$a + b = 2k + 1 + 2m + 1 = 2k + 2m + 2 = 2(k + m + 1)$$

Comme $k + m + 1$ est un entier, $a + b$ est le double d'un entier : il est pair.

Contrôle : $7 + 11 = 18$, et avec $k = 3$, $m = 5$, on trouve bien $2(3 + 5 + 1) = 18$. Avec la même lettre pour les deux nombres, on n'aurait traité que la somme d'un impair avec

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

lui-même.

Réponse. $(2k+1)+(2m+1)=2(k+m+1)$, multiple de 2 donc pair.

Correction de l'exercice 6 – Contre-exemple

Pour montrer qu'une affirmation « pour tout x » est fausse, **un seul contre-exemple** suffit ; pour montrer qu'elle est vraie, il faut un raisonnement général.

a) **Fausse** : pour $x=0{,}5$, $x^2=0{,}25<0{,}5$. En fait $x^2-x=x(x-1)$ est négatif pour $0<x<1$.

b) **Vraie** : si $x\geq 0$, $x\times x$ est un produit de deux positifs ; si $x<0$, c'est un produit de deux négatifs. Dans les deux cas, $x^2\geq 0$.

c) **Fausse** : pour $x=-3$, $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3\neq -3$. L'égalité correcte est

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

Tester seulement $x=2$ aurait pu faire croire a) vraie : on cherche les contre-exemples parmi les cas atypiques, négatifs ou nombres entre 0 et 1.

Réponse. a) fausse ($x=0{,}5$) · b) vraie · c) fausse ($x=-3$; en fait $\sqrt{x^2}=|x|$).

Correction de l'exercice 7 – Factorisation avec facteur commun caché

On repère le facteur commun dans les deux termes, et l'on met le reste entre crochets.

$$A=(x-2)[(x+5)+(3x-1)]=(x-2)(4x+4)=4(x-2)(x+1)$$

Pour B, on écrit $(2x+1)^2=(2x+1)(2x+1)$ pour faire apparaître le facteur commun $(2x+1)$:

$$B=(2x+1)[(2x+1)-(x-4)]=(2x+1)(x+5)$$

Attention au signe : $-(x-4)=-x+4$. **Contrôle** en $x=0$: $A=-10+2=-8$ et $4\times(-2)\times 1=-8$; $B=1+4=5$ et $1\times 5=5$.

Réponse. $A=4(x-2)(x+1)$ et $B=(2x+1)(x+5)$.

Correction de l'exercice 8 – Produit de deux entiers consécutifs

On raisonne par **disjonction de cas**, selon la parité de n.

— Si n est pair, $n=2k$, et le produit $n(n+1)=2k(n+1)$ est un multiple de 2.
— Si n est impair, $n=2k+1$, alors $n+1=2k+2=2(k+1)$, et le produit $n\times 2(k+1)$ est un multiple de 2.

Dans tous les cas, le produit est pair : de deux entiers consécutifs, l'un est toujours pair.

$$n(n+1)=2\times(\text{entier})$$

Contrôle : $6\times 7=42$ et $(-5)\times(-4)=20$. Conséquence : $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est toujours un entier, par exemple $\dfrac{7\times 8}{2}=28$.

Réponse. Par disjonction de cas : parmi n et $n+1$, l'un est pair, donc le produit est pair.

Correction de l'exercice 9 – Identité à démontrer

Pour comparer deux expressions, on étudie le signe de leur **différence**. Ici, on reconnaît une identité remarquable :

$$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Un carré est positif ou nul, donc $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$, c'est-à-dire $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

L'égalité a lieu quand $(a-b)^2 = 0$, c'est-à-dire quand $a = b$. **Contrôle** : $a = 3$, $b = 1$ donnent $10 \geq 6$; $a = b = 5$ donnent $50 = 50$. En appliquant ce résultat à $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ (pour $a, b \geq 0$), on obtient $a + b \geq 2\sqrt{ab}$: la moyenne de deux nombres positifs dépasse la racine de leur produit.

Réponse. $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $a = b$.

Correction de l'exercice 10 – Calcul astucieux

On reconnaît une différence de carrés dans A, et le produit $(a+b)(a-b)$ dans B.

$$A = 101^2 - 99^2 = (101 + 99)(101 - 99) = 200 \times 2 = 400$$

$$B = 1\,001 \times 999 = (1\,000 + 1)(1\,000 - 1) = 1\,000^2 - 1 = 999\,999$$

Contrôle : $10\,201 - 9\,801 = 400$. Plus généralement, deux entiers qui encadrent n ont pour produit $n^2 - 1$: $19 \times 21 = 400 - 1 = 399$. Les identités évitent ici de longues multiplications.

Réponse. $A = 400$ et $B = 999\,999$.

Correction de l'exercice 11 – Divisibilité

On factorise pour faire apparaître des entiers consécutifs.

$n^2 + n = n(n+1)$ est le produit de deux entiers consécutifs : l'un d'eux est pair, donc le produit est divisible par 2.

$$n^3 - n = n\left(n^2 - 1\right) = (n-1)\,n\,(n+1)$$

C'est le produit de trois entiers consécutifs. Parmi eux, au moins un est pair, donc le produit est divisible par 2 ; et l'un d'eux est un multiple de 3 (les restes dans la division par 3 sont 0, 1, 2 dans un certain ordre), donc le produit est divisible par 3. Un nombre divisible par 2 et par 3 est divisible par 6.

Contrôle : $n = 4$ donne $60 = 6 \times 10$, et $n = 10$ donne $990 = 6 \times 165$.

Réponse. $n^2 + n = n(n+1)$ (deux consécutifs) et $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ (trois consécutifs, donc divisible par 6).

Correction de l'exercice 12 – Développer un carré de somme de trois termes

On regroupe deux termes pour se ramener à une identité connue :
$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$. En développant :

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

On obtient les trois carrés et les trois doubles produits. Avec $a = x$, $b = 2y$ et $c = 3$: les carrés valent x^2, $4y^2$, 9 et les doubles produits $2 \times x \times 2y = 4xy$, $2 \times x \times 3 = 6x$, $2 \times 2y \times 3 = 12y$. D'où $(x + 2y + 3)^2 = x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy + 6x + 12y$.

Contrôle en $x = y = 1$: $(1+2+3)^2 = 36$ et $1 + 4 + 9 + 4 + 6 + 12 = 36$.

Réponse. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, soit $x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy + 6x + 12y$.

Correction de l'exercice 13 – Résoudre par factorisation

On ramène tous les termes dans un membre, **sans diviser par** x, puis on factorise :

$$x^2 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 5$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Diviser par x aurait fait perdre la solution 0 : on ne divise jamais par une quantité qui peut être nulle.

Pour la seconde, $4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x-1)(2x+1)$, qui s'annule pour $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

Contrôle : $4 \times \frac{1}{4} - 1 = 0$. Les deux solutions sont opposées, ce qui est normal pour une équation où x n'apparaît qu'au carré.

Réponse. $S = \{0\,;5\}$ et $S = \left\langle -\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right\rangle$.

Correction de l'exercice 14 – Réfuter une affirmation

L'affirmation est **fausse** : il suffit d'un contre-exemple. Le nombre 12 est divisible par 4 ($12 = 4 \times 3$) et par 6 ($12 = 6 \times 2$), mais pas par 24.

L'erreur vient de ce que 4 et 6 ont un facteur commun, 2. En décomposant, $4 = 2^2$ et $6 = 2 \times 3$: un multiple de 4 et de 6 contient au moins 2^2 et 3 dans sa décomposition, il est donc multiple de

$$2^2 \times 3 = 12$$

mais pas forcément de $24 = 2^3 \times 3$. En revanche, divisible par 3 et par 4, qui n'ont aucun facteur commun, implique bien divisible par 12.

Réponse. Faux : 12 est divisible par 4 et par 6, mais pas par 24 (le plus petit multiple commun de 4 et 6 est 12).

Correction de l'exercice 15 – Expression à simplifier

On ne simplifie une fraction que par des **facteurs** communs : on factorise le numérateur.

$$A = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 \qquad B = \frac{(x+3)^2}{x+3} = x+3$$

Ces simplifications sont permises parce que $x - 2 \neq 0$ et $x + 3 \neq 0$, comme l'énoncé le précise.

Contrôle en $x = 0$: $\frac{-4}{-2} = 2$ et $0 + 2 = 2$; $\frac{9}{3} = 3$. En $x = 2$, A n'existe pas, alors que $x + 2$ vaut 4 : la courbe de A est la droite $y = x + 2$ privée du point $(2\,;4)$. Barrer « x^2 » avec « x » serait une faute : on ne simplifie jamais des termes d'une somme.

Réponse. $A = x + 2$ et $B = x + 3$ (sous réserve des conditions d'existence).

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : démonstration guidée

a) On développe avec $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$:

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

b) Tout nombre impair s'écrit $2n + 1$ avec n entier ; d'après a), il est égal à $(n+1)^2 - n^2$, la différence des carrés de deux entiers consécutifs. Par exemple $7 = 4^2 - 3^2$.

c) 2 025 est impair : $2\,025 = 2n + 1$ avec $n = 1\,012$, donc $2\,025 = 1\,013^2 - 1\,012^2$.

Vérification : $1\,013^2 = 1\,026\,169$ et $1\,012^2 = 1\,024\,144$, de différence 2 025. D'autres écritures existent, par exemple avec $a + b = 81$ et $a - b = 25$: $2\,025 = 53^2 - 28^2$.

Réponse. a) $2n + 1$ · b) tout impair $2n + 1 = (n+1)^2 - n^2$ · c) $2025 = 1013^2 - 1012^2$ (ou $53^2 - 28^2$, 45^2…).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).