

Plaquette 4 – Calcul littéral, identités remarquables et démonstrations

Nombres et calculs — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Développement.

$$k(a + b) = ka + kb \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Identités remarquables.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Factorisation. On cherche un **facteur commun**, ou l'une des trois identités lue **de droite à gauche**.

Forme repérée	Factorisation
$a^2 - b^2$	$(a + b)(a - b)$
$a^2 + 2ab + b^2$	$(a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2$	$(a - b)^2$

Écritures utiles en arithmétique.

- **pair** : $2k$ · **impair** : $2k + 1$
- **multiple de** n : nk
- **deux entiers consécutifs** : n et $n + 1$

Types de raisonnement.

But	Méthode
prouver « pour tout »	calcul littéral général
réfuter « pour tout »	un contre-exemple suffit
prouver « il existe »	exhiber un exemple
cas selon la parité	disjonction de cas ($n = 2k$ ou $n = 2k + 1$)

Équation produit nul.

$$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

C'est **la** raison pour laquelle on factorise avant de résoudre.

Correction de l'exercice 1 – Développer

- **Pour A** — identité $(a + b)^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$:

$$A = 4x^2 + 2 \times 2x \times 3 + 9 = 4x^2 + 12x + 9$$

- **Contrôle en** $x = 1$: $(5)^2 = 25$, et $4 + 12 + 9 = 25$ ✓

- **Pour B** — identité $(a + b)(a - b)$:

$$B = x^2 - 25$$

- **Contrôle en** $x = 3$: $(-2)(8) = -16$, et $9 - 25 = -16$ ✓

— **Pour C** — double distributivité :

$$C = 6x^2 + 12x - 2x - 4 = 6x^2 + 10x - 4$$

— **Contrôle en** $x = 1$: $(2)(6) = 12$, et $6 + 10 - 4 = 12$ ✓

— **Erreur classique sur A** : écrire $4x^2 + 9$ en oubliant le **double produit** $12x$ ✓

— **Détection** : le test en $x = 1$ donnerait 13 au lieu de 25 ✓

— **Réflexe** : toujours contrôler un développement par une **valeur numérique** simple ✓

— **Choix de la valeur** : $x = 1$ est le plus rapide ; $x = 0$ ne teste que le terme constant ✓

Réponse. $A = 4x^2 + 12x + 9$ · $B = x^2 - 25$ · $C = 6x^2 + 10x - 4$.

Correction de l'exercice 2 - Factoriser

— **Pour A** : différence de carrés, avec $9x^2 = (3x)^2$ et $16 = 4^2$.

$$A = (3x + 4)(3x - 4)$$

— **Contrôle** : $(3x)^2 - 4^2 = 9x^2 - 16$ ✓

— **Pour B** : carré parfait, car $9 = 3^2$ et $6x = 2 \times x \times 3$.

$$B = (x + 3)^2$$

— **Contrôle** : $x^2 + 6x + 9$ ✓

— **Pour C** : facteur commun $4x$.

$$C = 4x(x - 5)$$

— **Contrôle** : $4x^2 - 20x$ ✓

— **Ordre des réflexes** : chercher **d'abord** un facteur commun, **puis** une identité remarquable ✓

— **Contrôle numérique en** $x = 2$: $A = 36 - 16 = 20$ et $(10)(2) = 20$ ✓ ;

$B = 4 + 12 + 9 = 25$ et $5^2 = 25$ ✓ ; $C = 16 - 40 = -24$ et $8 \times (-3) = -24$ ✓

— **Piège sur B** : vérifier que le double produit **correspond** — pour $x^2 + 5x + 9$, il n'y a pas de carré parfait ✓

— **Test** : $2 \times 1 \times 3 = 6 \neq 5$ ✓

Réponse. $A = (3x + 4)(3x - 4)$ · $B = (x + 3)^2$ · $C = 4x(x - 5)$.

Correction de l'exercice 3 - Équation produit nul

— **Première équation** : un produit est nul si **l'un** des facteurs est nul.

— $2x - 6 = 0$ donne $x = 3$; $x + 4 = 0$ donne $x = -4$.

$$S = \{-4; 3\}$$

— **Contrôles** : $(0)(7) = 0$ ✓ et $(-14)(0) = 0$ ✓

— **Seconde équation** : on **factorise** d'abord.

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3) = 0$$

— **Solutions** : $x = -3$ ou $x = 3$, soit $S = \{-3; 3\}$ ✓

— **Contrôles** : $9 - 9 = 0$ ✓ dans les deux cas

— **Méthode alternative pour la seconde** : $x^2 = 9$ donne $x = \pm 3$ — attention à ne **pas oublier** la solution négative ✓

— **Erreur classique** : écrire $x^2 = 9$ donc $x = 3$, en perdant la moitié des solutions ✓

— **Règle** : $x^2 = a$ avec $a > 0$ a **toujours deux** solutions, $\pm\sqrt{a}$ ✓

— **Cas particuliers** : $x^2 = 0$ a une solution ; $x^2 = -4$ n'en a **aucune** dans $\mathbb{R}$ ✓

Réponse. $S = \{-4; 3\}$ et $S = \{-3; 3\}$.

Correction de l'exercice 4 - Démontrer une identité

Méthode 1 — développement.

- $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ et $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$.
- **Différence** : $(x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1) = 4x$ ✓

Méthode 2 — identité $a^2 - b^2$. Avec $a = x + 1$ et $b = x - 1$:

$$(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = [(x + 1) + (x - 1)][(x + 1) - (x - 1)] = 2x \times 2 = 4x$$

- **Élégance** : la seconde méthode évite tout développement ✓
- **Contrôles** : $x = 3$ donne $16 - 4 = 12 = 4 \times 3$ ✓ ; $x = 0$ donne $1 - 1 = 0$ ✓ ; $x = -2$ donne $1 - 9 = -8 = 4 \times (-2)$ ✓
- **Attention aux parenthèses** : oublier celles de la soustraction donnerait $x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x + 1 = 2$ — **faux** ✓
- **Détection** : le test en $x = 3$ donnerait 2 au lieu de 12 ✓
- **Portée de la démonstration** : l'égalité est vraie pour **tout** réel — un calcul littéral le prouve, alors qu'aucun nombre de tests numériques ne suffirait ✓
- **Généralisation** : $(x + a)^2 - (x - a)^2 = 4ax$ ✓
- **Contrôle** : pour $a = 3$ et $x = 1$, $16 - 4 = 12 = 4 \times 3 \times 1$ ✓

Réponse. $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = [2x][2] = 4x$.

Correction de l'exercice 5 - Somme de deux impairs

- **Écriture générale** : soient $a = 2k + 1$ et $b = 2m + 1$ avec k et m entiers.
- **Somme** :

$$a + b = 2k + 1 + 2m + 1 = 2k + 2m + 2 = 2(k + m + 1)$$
- **Conclusion** : $a + b$ s'écrit $2 \times$ (entier), donc il est **pair** ✓
- **Point crucial** : il faut **deux lettres différentes** k et m ! Avec $2k + 1$ deux fois, on ne démontrerait la propriété que pour deux impairs **égaux** ✓
- **Contrôles** : $3 + 5 = 8$ ✓ ; $7 + 11 = 18$ ✓ ; $1 + 1 = 2$ ✓ ; $(-3) + 5 = 2$ ✓
- **Vérification de l'écriture** : pour $a = 7$, on a $k = 3$; pour $b = 11$, $m = 5$; et $2(3 + 5 + 1) = 18$ ✓
- **Propriétés voisines** : pair + pair = pair ; pair + impair = impair ; impair $\times$ impair = impair ✓
- **Démonstration du produit** :
 $(2k + 1)(2m + 1) = 4km + 2k + 2m + 1 = 2(2km + k + m) + 1$, **impair** ✓
- **Contrôle** : $3 \times 5 = 15$, impair ✓
- **Somme de trois impairs** : elle est **impaire** — par exemple $1 + 3 + 5 = 9$ ✓

Réponse. $(2k + 1) + (2m + 1) = 2(k + m + 1)$, multiple de 2 donc pair.

Correction de l'exercice 6 - Contre-exemple

- **a) Fausse.** Contre-exemple : $x = 0,5$ donne $x^2 = 0,25 < 0,5$ ✓
- **Domaine où c'est vrai** : pour $x \leq 0$ ou $x \geq 1$ — l'affirmation échoue précisément sur $]0; 1[$ ✓
- **Vérification** : $x^2 - x = x(x - 1)$, négatif entre 0 et 1 ✓
- **b) Vraie.** Un carré est toujours positif ou nul, quel que soit le signe de x ✓

- **Démonstration** : si $x \geq 0$, le produit $x \times x$ est positif ; si $x < 0$, le produit de deux négatifs est positif ✓
- **c) Fausse**. Contre-exemple : $x = -3$ donne $\sqrt{9} = 3 \neq -3$ ✓
- **Énoncé correct** : $\sqrt{x^2} = |x|$ ✓
- **Vérification** : $|-3| = 3$ ✓
- **Leçon sur les contre-exemples** : un seul suffit à réfuter un « pour tout » ✓
- **Asymétrie fondamentale** : réfuter demande un exemple, démontrer demande un raisonnement **général** ✓
- **Piège courant** : tester $x = 2$ pour a) donne $4 \geq 2$ ✓, ce qui pourrait faire croire l'affirmation vraie. Il faut chercher les cas **atypiques** : les négatifs, les valeurs entre 0 et 1, et le cas 0 ✓

Réponse. a) fausse ($x = 0,5$) · b) vraie · c) fausse ($x = -3$; en fait $\sqrt{x^2} = |x|$).

Correction de l'exercice 7 - Factorisation avec facteur commun caché

- **Pour A** : le facteur commun est $(x - 2)$.

$$A = (x - 2)[(x + 5) + (3x - 1)] = (x - 2)(4x + 4) = 4(x - 2)(x + 1)$$
- **Contrôle en $x = 0$** : $(-2)(5) + (-2)(-1) = -10 + 2 = -8$, et $4(-2)(1) = -8$ ✓
- **Pour B** : le facteur commun est $(2x + 1)$.

$$B = (2x + 1)[(2x + 1) - (x - 4)] = (2x + 1)(x + 5)$$
- **Contrôle en $x = 0$** : $1 - 1 \times (-4) = 1 + 4 = 5$, et $(1)(5) = 5$ ✓
- **Contrôle en $x = 1$** : $9 - 3 \times (-3) = 9 + 9 = 18$, et $(3)(6) = 18$ ✓
- **Simplification finale de A** : on extrait le facteur 4 de $(4x + 4)$ ✓
- **Piège du signe dans B** : $-(x - 4) = -x + 4$, et non $-x - 4$ ✓
- **Détection** : avec l'erreur de signe, on obtiendrait $(2x + 1)(x - 3)$, soit $1 \times (-3) = -3$ en $x = 0$ au lieu de 5 ✓
- **Réflexe** : repérer le facteur commun **avant** de développer — développer B donnerait $4x^2 + 4x + 1 - 2x^2 + 7x + 4 = 2x^2 + 11x + 5$, qu'il faudrait ensuite refactoriser ✓
- **Contrôle** : $(2x + 1)(x + 5) = 2x^2 + 11x + 5$ ✓

Réponse. $A = 4(x - 2)(x + 1)$ et $B = (2x + 1)(x + 5)$.

Correction de l'exercice 8 - Produit de deux entiers consécutifs

- **Écriture** : soient n et $n + 1$ deux entiers consécutifs.
- **Disjonction de cas selon la parité de n** .
- **Cas 1 — n est pair** : $n = 2k$, donc le produit vaut $2k(n + 1)$, **multiple de 2** ✓
- **Cas 2 — n est impair** : $n = 2k + 1$, donc $n + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$, et le produit vaut $n \times 2(k + 1)$, **multiple de 2** ✓
- **Conclusion** : dans tous les cas, le produit est **pair** ✓
- **Idée clé** : parmi deux entiers consécutifs, **l'un est nécessairement pair** ✓
- **Contrôles** : $3 \times 4 = 12$ ✓ ; $6 \times 7 = 42$ ✓ ; $(-5) \times (-4) = 20$ ✓ ; $0 \times 1 = 0$ ✓
- **Généralisation** : le produit de **trois** entiers consécutifs est divisible par 6 ✓
- **Vérification** : $3 \times 4 \times 5 = 60 = 6 \times 10$ ✓ et $5 \times 6 \times 7 = 210 = 6 \times 35$ ✓
- **Raison** : parmi trois consécutifs, l'un est multiple de 3 et au moins un est pair ✓
- **Application** : $\frac{n(n + 1)}{2}$ est **toujours un entier** — c'est la formule de la somme des n premiers entiers, qui doit forcément l'être ✓
- **Contrôle** : $\frac{7 \times 8}{2} = 28$ ✓

Réponse. Par disjonction de cas : parmi n et $n + 1$, l'un est pair, donc le produit est pair.

Correction de l'exercice 9 - Identité à démontrer

— **Méthode** : on étudie la **différence**.

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$$

— **Signe** : un carré est **toujours positif ou nul**, donc

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \quad \text{soit} \quad a^2 + b^2 \geq 2ab$$

— **Cas d'égalité** : $(a - b)^2 = 0$ équivaut à $a = b$ ✓

— **Contrôles** : $a = 3$, $b = 1$ donnent $9 + 1 = 10 \geq 6$ ✓

— $a = b = 5$ donnent $25 + 25 = 50 = 2 \times 25$ ✓ — **égalité**

— $a = -2$, $b = 3$ donnent $4 + 9 = 13 \geq -12$ ✓ — **largement**

— **Conséquence classique** : pour $a, b > 0$, en divisant par ab , on obtient $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ✓

— **Contrôle** : $\frac{3}{1} + \frac{1}{3} = 3,3333 \geq 2$ ✓

— **Autre conséquence** : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ pour $a, b \geq 0$ — c'est l'inégalité arithmético-géométrique ✓

— **Démonstration** : poser $a = x^2$ et $b = y^2$ dans l'inégalité initiale donne $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$... plus directement, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ donne $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ✓

— **Contrôle** : pour $a = 4$ et $b = 9$, $\frac{13}{2} = 6,5 \geq \sqrt{36} = 6$ ✓

— **Méthode générale à retenir** : pour comparer deux expressions, on étudie le **signe de leur différence** ✓

Réponse. $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $a = b$.

Correction de l'exercice 10 - Calcul astucieux

— **Pour A** — identité $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

$$A = (101 + 99)(101 - 99) = 200 \times 2 = 400$$

— **Vérification** : $10\,201 - 9\,801 = 400$ ✓

— **Pour B** — on reconnaît $(1000 + 1)(1000 - 1)$:

$$B = 1000^2 - 1^2 = 1\,000\,000 - 1 = 999\,999$$

— **Vérification** : $1001 \times 999 = 999\,999$ ✓

— **Gain de temps** : les deux calculs directs demanderaient une multiplication à plusieurs chiffres ✓

— **Généralisation** : $(n + 1)(n - 1) = n^2 - 1$, donc le produit de deux entiers encadrant n vaut toujours $n^2 - 1$ ✓

— **Contrôles** : $9 \times 11 = 99 = 100 - 1$ ✓ ; $19 \times 21 = 399 = 400 - 1$ ✓

— **Autre calcul astucieux** : $52^2 = (50 + 2)^2 = 2500 + 200 + 4 = 2704$ ✓

— **Et** $49^2 : (50 - 1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$ ✓

— **Astuce des carrés en 5** : $35^2 = 1225$, car $3 \times 4 = 12$ suivi de 25 ✓

— **Vérification** : $35^2 = 1225$ ✓ ; $65^2 = 4225$ car $6 \times 7 = 42$ ✓

Réponse. $A = 400$ et $B = 999\,999$.

Correction de l'exercice 11 - Divisibilité

- **Première partie** : $n^2 + n = n(n + 1)$ — c'est le produit de **deux entiers consécutifs**, donc **pair** ✓
- **Contrôles** : $n = 3$ donne 12 ✓ ; $n = 4$ donne 20 ✓ ; $n = -2$ donne 2 ✓
- **Seconde partie** : $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1) = (n - 1)n(n + 1)$.
- **Observation** : c'est le produit de **trois entiers consécutifs** ✓
- **Divisibilité par 2** : parmi trois consécutifs, au moins un est pair ✓
- **Divisibilité par 3** : parmi trois consécutifs, exactement un est multiple de 3 ✓
- **Conclusion** : le produit est divisible par 2 et par 3, donc par 6 (car 2 et 3 sont premiers entre eux) ✓
- **Contrôles** : $n = 3$ donne $24 = 6 \times 4$ ✓ ; $n = 4$ donne $60 = 6 \times 10$ ✓ ; $n = 5$ donne $120 = 6 \times 20$ ✓ ; $n = 10$ donne $990 = 6 \times 165$ ✓
- **Cas limites** : $n = 0$ donne 0, divisible par 6 ✓ ; $n = 1$ donne 0 ✓
- **Généralisation** : le produit de k entiers consécutifs est divisible par $k!$ ✓
- **Contrôle pour $k = 4$** : $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 = 4! \times 5$ ✓
- **Application** : $n^5 - n$ est divisible par 30 — une propriété du même type, plus délicate à établir ✓

Réponse. $n^2 + n = n(n + 1)$ (deux consécutifs) et $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$ (trois consécutifs, donc divisible par 6).

Correction de l'exercice 12 - Développer un carré de somme de trois termes

- **Méthode** : on regroupe, $(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2$.
- **Développement** : $(a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$
- **Structure** : les **trois carrés** et les **trois doubles produits** ✓
- **Contrôle** : pour $a = b = c = 1$, on obtient $3 + 6 = 9 = 3^2$ ✓
- **Application** avec $a = x$, $b = 2y$, $c = 3$:

$$(x + 2y + 3)^2 = x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy + 6x + 12y$$
- **Détail des doubles produits** : $2 \times x \times 2y = 4xy$; $2 \times x \times 3 = 6x$; $2 \times 2y \times 3 = 12y$ ✓
- **Contrôle en $x = 1$, $y = 1$** : $(1 + 2 + 3)^2 = 36$, et $1 + 4 + 9 + 4 + 6 + 12 = 36$ ✓
- **Contrôle en $x = 2$, $y = 0$** : $(2 + 0 + 3)^2 = 25$, et $4 + 0 + 9 + 0 + 12 + 0 = 25$ ✓
- **Erreur classique** : oublier un double produit, notamment $2bc$ ✓
- **Détection** : sans le $12y$, le test en $(1 ; 1)$ donnerait 24 au lieu de 36 ✓
- **Nombre de termes** : 3 carrés + 3 doubles produits = 6 termes, et en général

$$n + \frac{n(n - 1)}{2}$$
 pour n termes ✓

Réponse. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, soit $x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy + 6x + 12y$.

Correction de l'exercice 13 - Résoudre par factorisation

- **Première équation** : on ramène tout d'un côté **sans diviser par x** .
- $x^2 - 5x = 0$, donc $x(x - 5) = 0$.

$$S = \{0 ; 5\}$$

- **Contrôles** : $0 = 0$ ✓ et $25 = 25$ ✓

- **Erreur grave à éviter** : diviser par x donnerait $x = 5$, en **perdant** la solution $x = 0$ ✓
- **Règle absolue** : on ne divise **jamais** par une quantité qui peut être nulle ✓
- **Seconde équation** : différence de carrés, $4x^2 = (2x)^2$.
- $(2x - 1)(2x + 1) = 0$, donc $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$$

- **Contrôles** : $4 \times 0,25 - 1 = 0$ ✓ dans les deux cas
- **Méthode alternative** : $x^2 = \frac{1}{4}$ donne $x = \pm \frac{1}{2}$ ✓
- **Symétrie** : les solutions sont **opposées**, ce qui est normal pour une équation ne contenant que x^2 ✓
- **Contrôle du nombre de solutions** : une équation du second degré a au plus **deux** solutions ✓

Réponse. $S = \{0; 5\}$ et $S = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$.

Correction de l'exercice 14 - Réfuter une affirmation

- **Affirmation fausse.** Contre-exemple : 12.
- **Vérifications** : $12 = 4 \times 3$ (divisible par 4 ✓) et $12 = 6 \times 2$ (divisible par 6 ✓)
- **Mais** : $\frac{12}{24} = 0,5$ — 12 n'est **pas** divisible par 24 ✓
- **Explication** : 4 et 6 ne sont **pas premiers entre eux** (ils partagent le facteur 2) ✓
- **Bonne conclusion** : un nombre divisible par 4 et par 6 est divisible par leur **PPCM**, soit 12 ✓
- **Décomposition** : $4 = 2^2$ et $6 = 2 \times 3$, donc le PPCM est $2^2 \times 3 = 12$ ✓
- **Autres contre-exemples** : 36 et 60 sont divisibles par 4 et 6 mais pas par 24 ✓
- **Vérification** : $\frac{36}{24} = 1,5$ et $\frac{60}{24} = 2,5$ ✓
- **Cas où l'affirmation analogue est vraie** : divisible par 3 et par 4 (premiers entre eux) implique divisible par 12 ✓
- **Contrôle** : les multiples communs de 3 et 4 sont 12, 24, 36, ... — tous multiples de 12 ✓
- **Règle générale** : divisible par a et par b implique divisible par ab **si et seulement si** a et b sont premiers entre eux ✓

Réponse. Faux : 12 est divisible par 4 et 6 mais pas par 24 (le PPCM est 12, pas 24).

Correction de l'exercice 15 - Expression à simplifier

- **Pour A** : on factorise le numérateur.

$$A = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

- **Condition** : la simplification n'est licite que pour $x \neq 2$, ce que l'énoncé précise ✓
- **Contrôles** : $x = 0$ donne $\frac{-4}{-2} = 2$, et $0 + 2 = 2$ ✓ ; $x = 3$ donne $\frac{5}{1} = 5$, et $3 + 2 = 5$ ✓
- **Pour B** : le numérateur est un carré parfait.

$$B = \frac{(x+3)^2}{x+3} = x+3$$

- **Contrôles** : $x = 0$ donne $\frac{0+0+9}{0+3} = \frac{9}{3} = 3$, et $0 + 3 = 3$ ✓

- **Vérification** : $x = 1$ donne $\frac{1+6+9}{4} = \frac{16}{4} = 4$, et $1+3 = 4$ ✓
- **Importance de la condition** : en $x = 2$, l'expression A **n'existe pas**, alors que $x+2$ vaut 4 ✓
- **Conséquence** : les deux expressions sont égales **sauf** en ce point ✓
- **Lecture graphique** : la courbe de A est la droite $y = x + 2$ **privée** du point $(2; 4)$ ✓
- **Erreur classique** : simplifier $\frac{x^2-4}{x-2}$ en « $x^2 - 2$ » ou en « $\frac{x^2}{x} - \frac{4}{2}$ » — on ne simplifie **que** des facteurs, jamais des termes ✓
- **Détection** : le test en $x = 0$ donnerait -2 au lieu de 2 ✓

Réponse. $A = x + 2$ et $B = x + 3$ (sous réserve des conditions d'existence).

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : démonstration guidée

a) **Développement** :

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

- **Contrôles** : $n = 3$ donne $16 - 9 = 7 = 2 \times 3 + 1$ ✓ ; $n = 0$ donne $1 - 0 = 1$ ✓

b) **Dédution.** Tout nombre impair s'écrit $2n + 1$ avec n entier ; d'après a), il vaut donc $(n+1)^2 - n^2$.

- **Conclusion** : tout impair est la différence des carrés de **deux entiers consécutifs** ✓
- **Exemples** : $7 = 16 - 9$ ✓ ; $11 = 36 - 25$ ✓ ; $101 = 51^2 - 50^2 = 2601 - 2500$ ✓

c) **Application à 2025.** Ce nombre est impair, donc $2025 = 2n + 1$ avec $n = 1012$.

$$2025 = 1013^2 - 1012^2$$

- **Vérification** : $1013^2 = 1\,026\,169$ et $1012^2 = 1\,024\,144$, de différence 2025 ✓
- **Autre décomposition** : $2025 = 45^2$, donc aussi $2025 = 45^2 - 0^2$ ✓
- **Encore une autre** : $2025 = 81 \times 25$, et l'on peut chercher $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 2025$.
- **Avec $a+b = 81$ et $a-b = 25$** : $a = 53$ et $b = 28$, donc $2025 = 53^2 - 28^2 = 2809 - 784$ ✓
- **Avec $a+b = 405$ et $a-b = 5$** : $a = 205$ et $b = 200$, donc $2025 = 205^2 - 200^2 = 42\,025 - 40\,000$ ✓
- **Nombre de décompositions** : autant que de façons d'écrire $2025 = d \times d'$ avec d et d' de **même parité** — ici tous les diviseurs sont impairs, et $2025 = 3^4 \times 5^2$ a 15 diviseurs ✓
- **Cas impossible** : un nombre congru à 2 modulo 4, comme 6, ne peut **pas** s'écrire comme différence de deux carrés ✓
- **Vérification** : $(a+b)$ et $(a-b)$ ont toujours la même parité, donc leur produit est impair ou multiple de 4 ✓

Réponse. a) $2n + 1$ · b) tout impair $2n + 1 = (n+1)^2 - n^2$ · c) $2025 = 1013^2 - 1012^2$ (ou $53^2 - 28^2, 45^2 \dots$).