Plaquette 2 – Ensembles de nombres, fractions et puissances

Nombres et calculs — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Ensembles de nombres.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Ensemble	Contenu	Exemples
$\mathbb{N}$	entiers naturels	0, 7, 153
$\mathbb{Z}$	entiers relatifs	-5, 0, 12
$\mathbb{Q}$	quotients d'entiers	$\frac{2}{3}$, $-1{,}25$, 7
$\mathbb{R}$	tous les réels	$\sqrt{2}$, π, $-\frac{1}{3}$

Un nombre est **rationnel** s'il s'écrit $\frac{p}{q}$ avec p, q entiers et $q \neq 0$. Les nombres $\sqrt{2}$ et π sont **irrationnels**.

Fractions.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Puissances.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{mn} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^0 = 1$$

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Écriture scientifique. $a \times 10^n$ avec $1 \leq |a| < 10$ et n entier.

Racines carrées.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad (\sqrt{a})^2 = a \qquad \sqrt{a^2} = |a|$$

Attention : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ — par exemple $\sqrt{9+16} = 5$ mais $3 + 4 = 7$.

Correction de l'exercice 1 – Classer des nombres

Avant de classer un nombre, on le **simplifie** : une écriture compliquée peut cacher un entier. On rappelle les inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathrm{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

— -7 est un entier négatif : il est dans $\mathbb{Z}$ (donc dans D, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$), mais pas dans $\mathbb{N}$.

— $\frac{12}{4} = 3$ et $\sqrt{16} = 4$ sont des entiers naturels : ils sont dans tous les ensembles.

— $\frac{2}{3}$ est un quotient d'entiers qui n'est pas décimal : il est dans $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

— $\sqrt{3}$ et $\frac{\pi}{2}$ sont irrationnels : ils ne sont que dans $\mathbb{R}$.

Le piège est de juger sur l'écriture : $\sqrt{16}$ est un entier, alors que $\sqrt{17}$, 17 n'étant pas un carré parfait, est irrationnel.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $-7 \in \mathbb{Z} \cdot \frac{12}{4} = 3 \in \mathbb{N} \cdot \frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \cdot \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N} \cdot \sqrt{3}$ et $\frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}$ seulement.

Correction de l'exercice 2 – Calcul avec fractions

Pour additionner ou soustraire des fractions, on les écrit avec un **même dénominateur**, de préférence le plus petit multiple commun.

$$A = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} \qquad B = \frac{15}{18} - \frac{4}{18} = \frac{11}{18}$$

Pour B, 18 est le plus petit multiple commun de 6 et 9 ; avec 54, on aurait obtenu $\frac{33}{54}$, à simplifier par 3. Les deux résultats sont irréductibles, puisque 17 et 11 sont premiers et ne divisent pas le dénominateur.

Contrôle décimal : $0{,}667 + 0{,}75 \approx 1{,}417 \approx \frac{17}{12}$. L'erreur classique, additionner numérateurs et dénominateurs, donnerait $\frac{5}{7} \approx 0{,}71$, très loin.

Réponse. $A = \frac{17}{12}$ et $B = \frac{11}{18}$.

Correction de l'exercice 3 – Puissances

On applique les règles sur les puissances d'un même nombre : $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ et $(a^m)^n = a^{mn}$.

$$A = \frac{2^{5+(-3)}}{2^{-1}} = \frac{2^2}{2^{-1}} = 2^{2-(-1)} = 2^3 = 8 \qquad B = \frac{3^{2\times 3}}{3^4} = 3^{6-4} = 9$$

Contrôle pour A : $2^{-3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$ et $2^{-1} = 0{,}5$, donc $A = \frac{32 \times 0{,}125}{0{,}5} = \frac{4}{0{,}5} = 8$.

Deux pièges : un exposant négatif donne un **inverse**, jamais un nombre négatif ($2^{-3} \neq -8$) ; et $\left(3^2\right)^3 = 3^6$ n'est pas $3^{2^3} = 3^8$.

Réponse. $A = 8$ et $B = 9$.

Correction de l'exercice 4 – Écriture scientifique

L'écriture scientifique est $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$. Pour $A = 0{,}000\,42$, le premier chiffre non nul est au rang des dix-millièmes : $A = 4{,}2 \times 10^{-4}$. Pour $B = 315\,000$, on déplace la virgule de 5 rangs : $B = 3{,}15 \times 10^5$.

On multiplie les nombres décimaux entre eux et les puissances de 10 entre elles :

$$A \times B = (4{,}2 \times 3{,}15) \times 10^{-4+5} = 13{,}23 \times 10^1 = 1{,}323 \times 10^2$$

On a normalisé, car $13{,}23 \geq 10$. Le produit vaut 132,3. **Contrôle** d'ordre de grandeur : $4 \times 3 \times 10 = 120$.

Réponse. $A = 4{,}2 \times 10^{-4}$, $B = 3{,}15 \times 10^5$ et $A \times B = 1{,}323 \times 10^2 = 132{,}3$.

Correction de l'exercice 5 – Racines carrées

On extrait de chaque racine le plus grand **carré parfait**, grâce à $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour $a, b \geq 0$.

— $50 = 25 \times 2$, donc $A = 5\sqrt{2}$.
— $12 = 4 \times 3$ et $27 = 9 \times 3$: $B = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.
— $C = \sqrt{8 \times 18} = \sqrt{144} = 12$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\sqrt{12}+\sqrt{27}=5\sqrt{3}\neq\sqrt{39}$$

La racine se comporte bien avec le produit, jamais avec la somme : $\sqrt{39}\approx 6{,}24$, alors que $5\sqrt{3}\approx 8{,}66$. **Contrôle** de C par une autre voie : $2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=6\times 2=12$.

Réponse. $A=5\sqrt{2}$, $B=5\sqrt{3}$ et $C=12$.

Correction de l’exercice 6 – Fraction et division

Diviser par une fraction, c’est multiplier par son **inverse** :

$$A=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}=\frac{15}{8}=1{,}875$$

Pour B, on calcule d’abord le dénominateur complet : $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Donc $B=\frac{1}{1/2}=2$.

Contrôle : $\frac{0{,}75}{0{,}4}=1{,}875$. L’erreur classique serait d’écrire $\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=3+6=9$: l’inverse d’une somme n’est pas la somme des inverses.

Réponse. $A=\frac{15}{8}=1{,}875$ et $B=2$.

Correction de l’exercice 7 – Intervalles

On traduit chaque inégalité, en mettant un crochet tourné vers le nombre quand la borne est **incluse**, et un crochet ouvert du côté de l’infini.

a) $x\geq -2$: $x\in[-2\,;+\infty[$.
b) $-3<x\leq 5$: $x\in\,]-3\,;5]$.
c) $x<4$: $x\in\,]-\infty\,;4[$.

L’intersection contient les réels qui sont dans les **deux** intervalles : $x\geq -1$, $x\leq 3$, $x\geq 2$ et $x\leq 7$, c’est-à-dire $2\leq x\leq 3$.

$$[-1\,;3]\cap[2\,;7]=[2\,;3]$$

Contrôle : 2,5 est dans les deux intervalles ; 1 n’est pas dans $[2\,;7]$. La réunion, elle, vaudrait $[-1\,;7]$.

Réponse. a) $[-2\,;+\infty[$ · b) $]-3\,;5]$ · c) $]-\infty\,;4[$ · intersection $=[2\,;3]$.

Correction de l’exercice 8 – Valeur absolue

La valeur absolue d’un nombre est sa distance à 0 : elle est toujours positive. $|-7|=7$ et $|3-8|=|-5|=5$. Comme $\sqrt{2}\approx 1{,}41<2$, le nombre $\sqrt{2}-2$ est négatif, et sa valeur absolue est son opposé :

$$\left|\sqrt{2}-2\right|=2-\sqrt{2}\approx 0{,}59$$

$|x|=5$ a deux solutions, 5 et -5. $|x-3|$ est la distance entre x et 3 : elle vaut 2 pour $x=3+2=5$ et $x=3-2=1$.

Contrôle : $|5-3|=2$ et $|1-3|=2$. Une équation comme $|x|=-3$ n’aurait aucune solution.

Réponse. 7 ; 5 ; $2-\sqrt{2}$ · $x=\pm 5$ · $x=1$ ou $x=5$.

Correction de l’exercice 9 – Comparer des nombres

Les quatre nombres sont très proches : on les compare avec assez de décimales.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{12}{17} \approx 0{,}7059 \qquad \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}7071 \qquad 0{,}71 \qquad \frac{5}{7} \approx 0{,}7143$$

D'où $\frac{12}{17} < \sqrt{0{,}5} < 0{,}71 < \frac{5}{7}$. Arrondis au centième, trois d'entre eux vaudraient 0,71 : deux décimales ne suffisent pas.

Contrôle exact entre les deux fractions, sans calculatrice : $\frac{12}{17} = \frac{84}{119}$ et $\frac{5}{7} = \frac{85}{119}$, et $84 < 85$.

Réponse. $\frac{12}{17} < \sqrt{0{,}5} < 0{,}71 < \frac{5}{7}$.

Correction de l'exercice 10 – Développer avec puissances

Pour A, on élève **chaque** facteur au carré, puis on utilise $\left(10^3\right)^2 = 10^6$:

$$A = 2^2 \times \left(10^3\right)^2 = 4 \times 10^6$$

Pour B, on sépare les nombres et les puissances de 10 ; diviser par une puissance de 10 soustrait les exposants :

$$B = \frac{6}{3} \times 10^{-2-4} = 2 \times 10^{-6}$$

Contrôle : $(2\,000)^2 = 4\,000\,000$ et $\frac{0{,}06}{30\,000} = 0{,}000\,002$. Oublier d'élever le 2 au carré donnerait 2×10^6, la moitié du bon résultat.

Réponse. $A = 4 \times 10^6$ et $B = 2 \times 10^{-6}$.

Correction de l'exercice 11 – Fractions et pourcentages

Une remise de 15 % revient à multiplier par $1 - 0{,}15 = 0{,}85$, une remise de 20 % par 0,80. La seconde s'applique au prix déjà réduit : $80 \times 0{,}85 = 68$ €, puis $68 \times 0{,}80 = 54{,}40$ €.

Les coefficients se multiplient :

$$0{,}85 \times 0{,}80 = 0{,}68$$

Le prix est multiplié par 0,68, soit une réduction globale de $1 - 0{,}68 = 32$ %.

Additionner les pourcentages (35 %) serait faux : la seconde remise porte sur un prix plus petit. L'ordre des deux remises, en revanche, ne change rien, car $0{,}80 \times 0{,}85 = 0{,}68$ aussi.

Réponse. Prix final 54,40 € ; réduction globale de 32 % (et non 35 %).

Correction de l'exercice 12 – Écriture décimale d'une fraction

On effectue les divisions : $\frac{3}{8} = 0{,}375$, qui s'arrête ; $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ et $\frac{5}{11} = 0{,}4545\ldots$ ne s'arrêtent jamais, leurs décimales se répètent (périodes 3 et 45).

Une fraction irréductible a une écriture décimale finie si et seulement si son dénominateur n'a pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5 : on peut alors l'écrire avec un dénominateur 10^n. Ici $8 = 2^3$, d'où

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 125}{8 \times 125} = \frac{375}{1\,000} = 0{,}375$$

alors que 3 et 11 ne divisent aucune puissance de 10. Les trois nombres sont rationnels ; seul $\frac{3}{8}$ est décimal.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. 0,375 (finie) ; 0,333… et 0,4545… (périodiques) — finie si le dénominateur ne contient que des 2 et des 5.

Correction de l'exercice 13 – Calcul avec racines et fractions

Pour A, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{5}$, ce qui ne change pas le quotient, et l'on utilise $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$: $A=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Pour B, on multiplie par $1-\sqrt{3}$, l'expression **conjuguée**, pour faire apparaître l'identité $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ qui élimine la racine :

$$B=\frac{2\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(1-\sqrt{3}\right)}{1-3}=\frac{2\left(1-\sqrt{3}\right)}{-2}=\sqrt{3}-1$$

Contrôle : $\dfrac{2}{2{,}732}\approx 0{,}732$ et $\sqrt{3}-1\approx 0{,}732$. Le résultat est positif, comme le quotient de départ.

Réponse. $A=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ et $B=\sqrt{3}-1$.

Correction de l'exercice 14 – Problème de proportionnalité

Plus il y a d'ouvriers, moins il faut de temps : le nombre d'ouvriers et la durée sont inversement proportionnels. Ce qui reste constant, c'est la quantité de travail, $3\times 12=36$ jours de travail d'un ouvrier.

$$\text{durée pour 5 ouvriers}=\frac{36}{5}=7{,}2\text{ jours}$$

Contrôle : $5\times 7{,}2=36$, et le résultat est bien inférieur à 12 jours. Une proportionnalité directe donnerait $\dfrac{12\times 5}{3}=20$ jours, absurde puisque plus d'ouvriers vont plus vite. Le modèle reste une idéalisation : en pratique, les ouvriers peuvent se gêner.

Réponse. 7,2 jours (proportionnalité inverse : $3\times 12=5\times 7{,}2=36$).

Correction de l'exercice 15 – Ordre de grandeur

Une année compte $365\times 24\times 60\times 60$ secondes. Pour estimer, on arrondit chaque facteur : $365\approx 400$, 24 et 3 600 :

$$4\times 10^{2}\times 2{,}4\times 10^{1}\times 3{,}6\times 10^{3}\approx 34{,}6\times 10^{6}\approx 3{,}5\times 10^{7}$$

L'estimation est un peu forte, car on a arrondi 365 vers le haut. Le calcul exact donne $365\times 24=8\,760$ heures, puis $8\,760\times 3\,600=31\,536\,000$, soit $3{,}15\times 10^{7}$ secondes.

La valeur 3×10^{7} est donc une bonne approximation, à environ 5 % près. Un bon moyen mnémotechnique : une année dure environ $\pi\times 10^{7}$ secondes.

Réponse. $31\,536\,000=3{,}1536\times 10^{7}$ secondes — l'estimation 3×10^{7} est bonne à 5 % près.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : calculs combinés

a) La multiplication est prioritaire sur la soustraction. On simplifie avant de multiplier :

$$\frac{2}{3}\times\frac{9}{4}=\frac{2\times 9}{3\times 4}=\frac{3}{2}\qquad A=\frac{3}{2}-\frac{1}{6}=\frac{9}{6}-\frac{1}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

b) Tous les radicandes sont des multiples de 3 : $75=25\times 3$, $48=16\times 3$ et $12=4\times 3$. Donc $B=5\sqrt{3}-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) On regroupe les nombres d'un côté, les puissances de 10 de l'autre :
$C = \dfrac{4 \times 5}{2} \times 10^{-3+7-2} = 10 \times 10^{2} = 10^{3} = 1\,000$.

Contrôle de c) : $\dfrac{0{,}004 \times 50\,000\,000}{200} = \dfrac{200\,000}{200} = 1\,000$.

Réponse. a) $A = \dfrac{4}{3}$ · b) $B = 3\sqrt{3}$ · c) $C = 10^{3} = 1000$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).