Plaquette 3 – Intervalles, inéquations et valeur absolue

Nombres et calculs — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Intervalles.

Notation	Condition	Bornes
$[a\,;b]$	$a \leq x \leq b$	incluses
$]a\,;b[$	$a < x < b$	exclues
$[a\,;b[$	$a \leq x < b$	mixte
$[a\,;+\infty[$	$x \geq a$	a incluse
$]-\infty\,;b]$	$x \leq b$	b incluse

L'infini est **toujours** du côté ouvert.

Opérations.

— **Intersection** $\cap$: les éléments communs — « **et** ».

— **Réunion** $\cup$: les éléments de l'un **ou** de l'autre.

Inéquations du premier degré. On isole x en appliquant les mêmes opérations aux deux membres. **Attention** : multiplier ou diviser par un nombre **négatif** inverse le sens de l'inégalité.

$$-3x > 6 \iff x < -2$$

Valeur absolue.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$|x-a|$ est la **distance** entre x et a.

Écriture	Traduction	Solution
$\lvert x-a\rvert = r$	distance r de a	$x = a-r$ ou $x = a+r$
$\lvert x-a\rvert \leq r$	à moins de r de a	$[a-r\,;a+r]$
$\lvert x-a\rvert \geq r$	à au moins r de a	$]-\infty\,;a-r] \cup [a+r\,;+\infty[$

Encadrement d'une expression. Si $a \leq x \leq b$, alors $ka \leq kx \leq kb$ pour $k > 0$, mais l'ordre **s'inverse** pour $k < 0$.

Correction de l'exercice 1 – Traduire en intervalle

On traduit chaque condition en repérant si la borne est incluse (crochet tourné vers le nombre) ou exclue.

a) $x > 3$: $]3\,;+\infty[$, le 3 est exclu.

b) $-1 \leq x < 4$: $[-1\,;4[$.

c) $x \leq 0$: $]-\infty\,;0]$.

d) $x \neq 2$: tous les réels sauf un, ce qui ne tient pas en un seul intervalle. On écrit une **réunion** :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$$

qu'on note aussi $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **Contrôle** : -1 appartient à $[-1\,;4[$, 4 non.

Réponse. a) $]3\,;+\infty[$ · b) $[-1\,;4[$ · c) $]-\infty\,;0]$ · d) $]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 2 – Intersection et réunion

L'intersection $A\cap B$ contient les réels qui sont dans **les deux** intervalles : $-3\leq x\leq 2$ et $0<x\leq 5$, soit $0<x\leq 2$. La borne 0 est exclue car elle l'est dans B ; la borne 2 est incluse car elle l'est dans les deux.

$$A\cap B=]0\,;2]\qquad A\cup B=[-3\,;5]$$

La réunion contient les réels qui sont dans **l'un ou l'autre** ; comme les intervalles se chevauchent, elle forme un seul intervalle, de -3 (inclus dans A) à 5 (inclus dans B).

Contrôle : 0 est dans A mais pas dans B, donc dans la réunion et pas dans l'intersection.

Réponse. $A\cap B=]0\,;2]$ et $A\cup B=[-3\,;5]$.

Correction de l'exercice 3 – Inéquation simple

On regroupe les x à gauche et les nombres à droite, en changeant le signe des termes déplacés :

$$5x-3\leq 2x+9\Leftrightarrow 3x\leq 12\Leftrightarrow x\leq 4$$

On a divisé par 3, nombre positif : le sens de l'inégalité est conservé. Donc $S=]-\infty\,;4]$, la borne 4 étant incluse puisque l'inégalité est large.

Vérification : $x=4$ donne $17\leq 17$, vrai ; $x=5$ donne $22\leq 19$, faux. Graphiquement, la droite $y=5x-3$ est sous la droite $y=2x+9$ jusqu'à leur point commun $(4\,;17)$.

Réponse. $S=]-\infty\,;4]$.

Correction de l'exercice 4 – Inéquation avec coefficient négatif

On regroupe : $-2x-3x>-8-7$, soit $-5x>-15$. On divise par -5, nombre **négatif** : le sens de l'inégalité **s'inverse**.

$$-5x>-15\Leftrightarrow x<3$$

Donc $S=]-\infty\,;3[$. **Contrôle** : $x=0$ donne $7>-8$, vrai ; $x=3$ donne $1>1$, faux.

Pour éviter tout risque, on peut regrouper les x du côté où leur coefficient est positif : $7+8>3x+2x$, soit $15>5x$ et $3>x$, sans jamais diviser par un négatif. Oublier d'inverser le sens donnerait $x>3$, et le test en $x=0$ le détecte aussitôt.

Réponse. $S=]-\infty\,;3[$ (le sens s'inverse à la division par -5).

Correction de l'exercice 5 – Système d'inéquations

On résout chaque inéquation, puis on garde les réels qui vérifient **les deux** : la solution d'un système est une intersection.

— $2x-1\geq 3\Leftrightarrow 2x\geq 4\Leftrightarrow x\geq 2$.

— $5-x>1\Leftrightarrow 5-1>x\Leftrightarrow x<4$ (en passant x à droite, sans division par un négatif).

$$S=[2\,;+\infty[\,\cap\,]-\infty\,;4[\,=[2\,;4[$$

Contrôle des bornes : $x=2$ donne $3\geq 3$ et $3>1$, la borne 2 est incluse ; $x=4$ donne $1>1$, faux, la borne 4 est exclue.

Réponse. $S=[2\,;4[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Valeur absolue et distance

La distance entre x et a s'écrit $|x-a|$.

a) « À moins de 3 de 7 » : $|x-7|\leq 3$. Les réels concernés sont entre $7-3$ et $7+3$:

$$|x-7|\leq 3 \Leftrightarrow 4\leq x\leq 10$$

b) « À plus de 2 de -1 » : la distance à -1 s'écrit $|x-(-1)|=|x+1|$, et $|x+1|\geq 2$. Les réels concernés sont à gauche de $-1-2=-3$ ou à droite de $-1+2=1$:
$S=]-\infty\,;-3]\cup[1\,;+\infty[$.

Contrôle : $|0+1|=1<2$, donc 0 n'est pas solution de b), ce qui est cohérent. Inégalité « inférieure » : un intervalle centré ; inégalité « supérieure » : deux demi-droites.

Réponse. a) $|x-7|\leq 3$, soit $[4\,;10]$ · b) $|x+1|\geq 2$, soit $]-\infty\,;-3]\cup[1\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 7 – Encadrement

On transforme l'encadrement $2\leq x\leq 5$ étape par étape.

— Multiplier par $3>0$ conserve le sens : $6\leq 3x\leq 15$, puis en ajoutant 1, $7\leq 3x+1\leq 16$.

— Multiplier par $-2<0$ **inverse** le sens : $-10\leq -2x\leq -4$; la plus grande valeur, -4, correspond à $x=2$.

— La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$: elle inverse l'ordre de deux nombres positifs.

$$2\leq x\leq 5 \Longrightarrow \frac{1}{5}\leq \frac{1}{x}\leq \frac{1}{2}$$

Contrôle avec $x=3$: 10, -6 et $\frac{1}{3}\approx 0{,}33$ sont bien dans les trois encadrements.

L'encadrement de $\frac{1}{x}$ suppose que x ne change pas de signe.

Réponse. $7\leq 3x+1\leq 16$ · $-10\leq -2x\leq -4$ · $\frac{1}{5}\leq \frac{1}{x}\leq \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 8 – Inéquation avec fractions

On multiplie les deux membres par 6, nombre positif : le sens est conservé et les fractions disparaissent.

$$2x-3(x-1)\leq 6 \Leftrightarrow 2x-3x+3\leq 6 \Leftrightarrow -x\leq 3 \Leftrightarrow x\geq -3$$

On a multiplié par -1 à la dernière étape, ce qui inverse le sens. Donc $S=[-3\,;+\infty[$.

Vérification : $x=-3$ donne $-1-\frac{-4}{2}=1\leq 1$, la borne est incluse ; $x=-6$ donne $-2+3{,}5=1{,}5$, qui dépasse 1. Le piège est le signe devant la parenthèse : $-3(x-1)=-3x+3$.

Réponse. $S=[-3\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 9 – Appartenance à un intervalle

Pour décider si un nombre appartient à $[-1{,}5\,;3{,}14]$, on le compare aux deux bornes, avec assez de décimales.

— $\sqrt{2}\approx 1{,}414$ est entre $-1{,}5$ et 3,14 : il appartient à l'intervalle.

— $\frac{22}{7}\approx 3{,}1429$ dépasse 3,14 : il n'appartient pas à l'intervalle.

— $-\frac{3}{2}=-1{,}5$ est la borne de gauche, incluse : il appartient à l'intervalle.

Contrôle exact pour $\frac{22}{7}$: $7\times 3{,}14=21{,}98<22$, donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{22}{7} > 3{,}14$$

L'écart est faible, mais réel : $\frac{22}{7}$ est une valeur approchée de π **par excès**.

Réponse. $\sqrt{2}$ oui · $\frac{22}{7} \approx 3{,}1429$ non · $-\frac{3}{2}$ oui (borne incluse).

Correction de l'exercice 10 – Inéquation produit simple

On étudie le signe de chaque facteur. $x-2$ s'annule en 2 et est négatif avant, positif après ; $x+3$ s'annule en -3 et est négatif avant, positif après. La règle des signes donne :

x	$]-\infty\,;-3[$	-3	$]-3\,;2[$	2	$]2\,;+\infty[$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
produit	$+$	0	$-$	0	$+$

Le produit est positif ou nul à l'extérieur des racines, racines comprises :

$$S =]-\infty\,;-3] \cup [2\,;+\infty[$$

Vérification : $x=0$ donne $(-2)\times 3 = -6 < 0$, et $x=3$ donne $1\times 6 = 6 \geq 0$.

Réponse. $S =]-\infty\,;-3] \cup [2\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 11 – Problème d'encadrement

Le périmètre vaut $P = 2(L+\ell)$. On additionne les encadrements, ce qui est toujours permis : $11 \leq L+\ell \leq 17$, puis on multiplie par 2 :

$$22 \leq P \leq 34 \text{ cm}$$

L'aire vaut $L\times\ell$. On peut multiplier membre à membre des encadrements **à bornes positives** : $8\times 3 \leq L\ell \leq 12\times 5$, soit $24 \leq A \leq 60$ cm².

Contrôle : $L=10$ et $\ell=4$ donnent $P=28$ et $A=40$, bien dans les encadrements. L'imprécision relative est plus grande sur l'aire : les incertitudes se cumulent dans un produit.

Réponse. $22 \leq P \leq 34$ cm et $24 \leq A \leq 60$ cm².

Correction de l'exercice 12 – Valeur absolue dans une équation

$|2x-6|=4$ signifie que $2x-6$ vaut 4 ou -4, les deux seuls nombres dont la valeur absolue est 4 :

$$2x-6=4 \Leftrightarrow x=5 \qquad 2x-6=-4 \Leftrightarrow x=1$$

Donc $S=\{1\,;5\}$. **Contrôle** : $|10-6|=4$ et $|2-6|=4$. On peut aussi écrire $|2x-6|=2|x-3|$: l'équation revient à $|x-3|=2$, les points à distance 2 de 3.

La seconde équation, $|3x+1|=-2$, n'a **aucune** solution : une valeur absolue n'est jamais négative. Réflexe : devant $|A|=k$, on regarde d'abord le signe de k.

Réponse. $S=\{1\,;5\}$ pour la première ; $S=\varnothing$ pour la seconde.

Correction de l'exercice 13 – Inéquation et pourcentage

Pour m minutes, le premier forfait coûte $12+0{,}05m$ €, le second 20 €. Le second est plus avantageux quand le premier coûte plus cher :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$12 + 0{,}05m > 20 \Leftrightarrow 0{,}05m > 8 \Leftrightarrow m > 160$$

On a divisé par $0{,}05 > 0$. Le second forfait devient avantageux au-delà de 160 minutes, soit à partir de 161 minutes (environ 2 h 40 par mois).

Contrôle : pour 160 minutes, les deux forfaits coûtent 20 € ; pour 200 minutes, le premier coûte 22 €. Le seuil se lit comme l'écart des parts fixes divisé par le prix d'une minute : $\dfrac{20-12}{0{,}05} = 160$.

Réponse. À partir de 161 minutes (seuil d'indifférence à 160 minutes).

Correction de l'exercice 14 – Réunion et intersection multiples

On respecte les parenthèses : d'abord l'intersection, ensuite la réunion. Les réels communs à $[-2\,;4]$ et $[1\,;7]$ vérifient $1 \leq x \leq 4$:

$$[-2\,;4] \cap [1\,;7] = [1\,;4]$$

On réunit ensuite $[1\,;4]$ et $[-5\,;0]$. Ces intervalles ne se touchent pas, il reste un « trou » entre 0 et 1 : le résultat est $[-5\,;0] \cup [1\,;4]$.

Contrôle : 0,5 n'appartient ni à l'un ni à l'autre. Avec d'autres parenthèses, $[-2\,;4] \cap ([1\,;7] \cup [-5\,;0])$ vaudrait $[-2\,;0] \cup [1\,;4]$: l'ordre des opérations compte.

Réponse. $[-5\,;0] \cup [1\,;4]$ (les deux morceaux ne se rejoignent pas).

Correction de l'exercice 15 – Inéquation à paramètre

Pour passer de $mx > 6$ à une inégalité sur x, on divise par m. Tout dépend du **signe** de m.

— Si $m > 0$, le sens est conservé : $x > \dfrac{6}{m}$.

— Si $m < 0$, le sens s'inverse : $x < \dfrac{6}{m}$.

— Si $m = 0$, on ne peut pas diviser : l'inéquation devient $0 > 6$, toujours fausse, et $S = \varnothing$.

L'inéquation a donc pour solution $x > \dfrac{6}{m}$ si et seulement si $m > 0$.

$$m > 0 : S = \left]\frac{6}{m}\,;+\infty\right[\qquad m < 0 : S = \left]-\infty\,;\frac{6}{m}\right[$$

Contrôle avec $m = -2$: $-2x > 6$ donne $x < -3$, et $\dfrac{6}{-2} = -3$. On ne divise jamais par un paramètre sans discuter son signe.

Réponse. $m > 0$; pour $m < 0$ le sens s'inverse, et pour $m = 0$ il n'y a aucune solution.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : problème complet

a) La première heure coûte 2 €, chacune des $h - 1$ suivantes 1,50 € :

$$P(h) = 2 + 1{,}5(h-1) = 1{,}5h + 0{,}5$$

Contrôle : $P(1) = 2$ € et $P(2) = 3{,}50$ €.

b) On cherche les h tels que $P(h) \leq 12$: $1{,}5h \leq 11{,}5$, soit $h \leq 7{,}67$. Le nombre d'heures étant entier, on peut stationner 7 heures, pour $P(7) = 11$ € ; 8 heures coûteraient 12,50 €.

c) L'abonnement revient à $\dfrac{60}{20} = 3$ € par stationnement. Il est rentable si un stationnement à l'unité coûte plus de 3 € : $1{,}5h + 0{,}5 > 3$, soit $h > 1{,}67$. Les heures étant entamées, l'abonnement est rentable dès 2 heures par stationnement en moyenne (3,50 € contre 3 €), à condition d'utiliser les 20 stationnements.

Réponse. a) $P(h) = 1{,}5h + 0{,}5$ · b) 7 heures · c) rentable à partir de 2 heures de moyenne.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).